

## Aufgaben zu Lagebeziehungen Gerade/Ebene und Ebene/Ebene

1.0 Untersuchen Sie jeweils die Lagebeziehung zwischen der Ebene E und der Geraden g.

$$1.1 \text{ E: } 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 4 = 0 \quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$1.2 \text{ E: } 13x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 61 = 0 \quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$1.3 \text{ E: } 2x_1 - 2x_2 - x_3 + 17 = 0 \quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$1.4 \text{ E: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -10 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

2 Bestimmen Sie den Durchstoßpunkt der Geraden g, die durch die Punkte A(-2/-1/6) und B(0/1/2) festgelegt ist, durch die Ebene E:  $x_1 - x_2 + 2x_3 - 3 = 0$ .

3.0 Untersuchen Sie jeweils die Lagebeziehung zwischen den Ebenen E<sub>1</sub> und E<sub>2</sub>.

$$3.1 \text{ E}_1: 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 8 = 0 \quad \text{E}_2: -3x_1 - 7,5x_2 + 4,5x_3 + 12 = 0$$

$$3.2 \text{ E}_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{E}_2: -x_1 - 2x_2 + 4 = 0$$

$$3.3 \text{ E}_1: 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \quad \text{E}_2: 3x_1 - x_2 - x_3 = 2$$

$$3.4 \text{ E}_1: 3x_1 + 2x_2 + 9x_3 - 3 = 0 \quad \text{E}_2: 12x_1 - x_2 + 12x_3 - 6 = 0$$

$$3.5 \text{ E}_1: 2x_1 + x_2 - 4x_3 - 6 = 0 \quad \text{E}_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

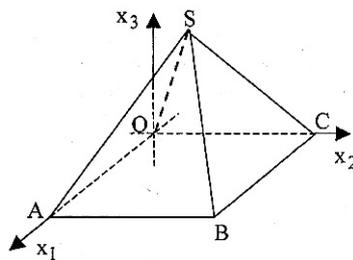
4 Berechnen Sie den Schnittwinkel  $\alpha$  zwischen der Geraden  $g: \vec{x} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$  und der

$$\text{Ebene E: } 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0.$$

5 Berechnen Sie den Schnittwinkel zwischen den Ebenen  $E_1: 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 2 = 0$  und

$$E_2: \vec{x} = k \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

6.0 Vor dem Louvre, dem berühmten Pariser Kunstmuseum, wurde im Jahre 1989 eine Glaspiramide erbaut, welche den unterirdisch liegenden Haupteingang beherbergt. Diese Pyramide wurde der Cheops-Pyramide nachempfunden. Die Seitenlänge der quadratischen, nach unten offenen Grundfläche beträgt 35 m und die Spitze S liegt lotrecht über deren Mittelpunkt in einer Höhe von 22 m. In einem geeignet gewählten kartesischen Koordinatensystem (1 LE = 1 m) sind der Ursprung O und der Punkt  $B(35;35;0)$  zwei Eckpunkte der in der  $x_1, x_2$ -Ebene liegenden horizontalen Grundfläche. Die Skizze zeigt die prinzipielle Lage der Pyramide. (Abitur 2010 BI)



6.1 Geben Sie die Koordinaten der beiden Eckpunkte A und C sowie der Spitze S an.

6.2 Bestimmen Sie eine Parameter- und eine Normalengleichung der Ebene E, in der die Punkte A, B und S liegen.

(Mögliches Teilergebnis:  $E: 22x_1 + 17,5x_3 - 770 = 0$ )

6.3 Berechnen Sie den Neigungswinkel einer Seitenfläche gegenüber der Grundfläche.

6.4 Berechnen Sie den Flächeninhalt einer der vier gläsernen Seitenflächen.

6.5 An einem im Punkt S befestigten Seil wurde eine nach allen Seiten gleichmäßig Licht abstrahlende Lampe so aufgehängt, dass die Lichtstrahlen im Schwerpunkt jeder Seitenfläche senkrecht auftreffen.

Zeigen Sie, dass der Punkt  $M\left(\frac{175}{6} / \frac{35}{2} / \frac{22}{3}\right)$  der Schwerpunkt des Dreiecks ABS ist

und zeigen Sie, dass der Aufhängepunkt P der als punktförmig angenommenen Lampe unterhalb der offenen Grundfläche OABC liegt.

6.6 Vor der Pyramide steht ein senkrechter Fahnenmast, dessen Spitze F die Koordinaten

F(40/30/8) besitzt. Paralleles Sonnenlicht mit dem Richtungsvektor  $\vec{l} = \begin{pmatrix} -2,5 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$  erzeugt

auf der Seitenfläche ABS der Pyramide den Schattenpunkt  $F_s$  der Spitze F.

Bestimmen Sie die Koordinaten dieses Punktes  $F_s$

7.0 Die Punkte A(1/0/-2) und B(-1/2/2) legen die Gerade g fest, die Punkte  $C_k(k/-k/-2-k)$  liegen auf der Geraden h. (Abitur 2010 BII)

7.1 Geben Sie für die beiden Geraden g und h jeweils eine Gleichung an und untersuchen Sie die gegenseitige Lage dieser beiden Geraden.

7.2 Stellen Sie eine Gleichung der Geraden i auf, die die beiden Geraden g und h jeweils senkrecht schneidet.

7.3 Die Punkte A, B und  $C_k$  legen für jeden Wert von k genau eine Ebene  $E_k$  fest. Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene  $E_k$  in Normalenform.

(Mögliches Ergebnis:  $E_k : kx_1 + (k-2)x_2 + x_3 - k + 2 = 0$ )

7.4 Gegeben ist außerdem die Ebene H:  $x_1 - x_2 - 2x_3 + 19 = 0$ .

Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes S, der sowohl auf der Ebene H als auch auf jeder Ebene  $E_k$  liegt.

8.0 Methan  $CH_4$  ist eine Kohlenwasserstoffverbindung. Das Molekül hat die Form eines regulären Tetraeders, in dessen Ecken sich die H-Atome befinden.

Das C-Atom liegt im Punkt C, gleich weit von allen H-Atomen entfernt. Der Punkt C teilt die Höhen des Tetraeders im Verhältnis 3:1. Die Ecken des Tetraeders, also die Lage der H-Atome seien die Punkte P(1;0;0), Q(0;1;0), R(0;0;1) und S(1;1;1). (Abitur 2011 BII)

8.1 Die Punkte P, Q und S liegen in einer Ebene F. Bestimmen Sie eine Gleichung dieser Ebene in Koordinatenform.

(Mögliches Ergebnis:  $F : x_1 + x_2 - x_3 - 1 = 0$ )

8.2 Bestimmen Sie das Volumen des Tetraeders PQSR.

8.3 Der Punkt T ist der Fußpunkt des vom Punkt R auf die Ebene F gefällten Lotes.

Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes T.

(Ergebnis:  $T\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$ )

8.4 Berechnen Sie die Koordinaten des C-Atoms.

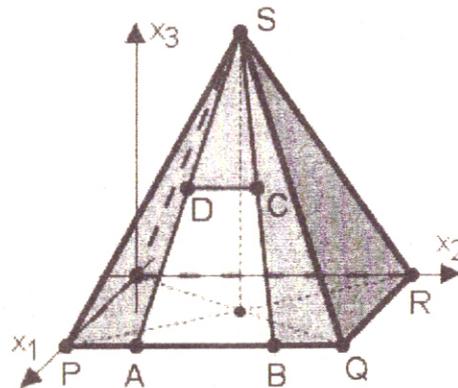
8.5 Bestimmen Sie den Winkel  $\sphericalangle$  zwischen zwei C-H-Bindungen, also z.B. den Winkel PCS.

9.0 In einem kartesischen Koordinatensystem des  $\mathbb{R}^3$  sind die Ebenen  $E_a$  und die Gerade  $g$  gegeben:  $E_a: (1+a) \cdot x_1 + a \cdot x_2 - (a-2) \cdot x_3 - a = 0$  mit  $a \in \mathbb{R}$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ mit } \lambda \in \mathbb{R}. \text{ (Abitur 2012 BI)}$$

- 9.1 Geben Sie für  $a = 0$  die besondere Lage der Ebene  $E_0$  im Koordinatensystem an.
- 9.2 Untersuchen Sie die Lage der Geraden  $g$  zur Ebene  $E_a$  in Abhängigkeit von  $a$ .
- 9.3 Zeigen Sie, dass der Punkt  $P(2/-2/-1)$  auf allen Ebenen  $E_a$ , aber nicht auf der Geraden  $g$  liegt.
- 9.4 Der Punkt  $P$  und die Gerade  $g$  legen eine Ebene  $F$  fest. Geben Sie eine Gleichung der Ebene  $F$  in Parameterform an und schließen Sie aus Ihren bisherigen Ergebnissen auf die Lage der Ebenen  $E_a$  zur Ebene  $F$  in Abhängigkeit von  $a$ . Begründen Sie Ihre Aussagen ohne weitere Rechnung.

10.0 Die Abbildung zeigt ein Zelt mit der Form einer Pyramide mit quadratischer Grundfläche der Seitenlänge 2 m und der Spitze  $S$  in 2 m Höhe über dem Mittelpunkt der Grundfläche. In der Vorderfläche  $PQS$  befindet sich die trapezförmige Einstiegsöffnung  $ABCD$ . Dabei sind  $C$  und  $D$  die Mittelpunkte der Strecken  $[BS]$  bzw.  $[AS]$ . Die Strecken  $[PA]$  und  $[BQ]$  haben jeweils die Länge 0,5 m. Maßstab des Koordinatensystems: 1 LE = 1 m. (Abitur 2012 BII)



- 10.1 Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte  $A, B, C, D$  und  $S$  und berechnen Sie den Flächeninhalt der Einstiegsöffnung.  
 (Teilergebnis:  $D(1,5/0,75/1)$ )
- 10.2 Eine als punktförmig angesehene Lichtquelle, die 25 cm unter der Zeltspitze  $S$  hängt, erzeugt bei geöffneter Einstiegsöffnung auf dem horizontalen Boden vor dem Zelt einen viereckigen Lichtteppich  $ABC'D'$ . Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte  $C'$  und  $D'$ .

11.0 In einem kartesischen Koordinatensystem des  $\mathbb{R}^3$  ist die Menge der Ebenen

$$E_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} a \\ a \\ a+1 \end{pmatrix} \text{ mit } \lambda, \mu, a \in \mathbb{R} \text{ gegeben, außerdem die}$$

Menge der Punkte  $C_{k,m} (2k-3m-1/m-3/-k+m+4)$  mit  $k, m \in \mathbb{R}$ . (Abitur 2013 BI)

11.1 Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene F in Koordinatenform, auf der alle Punkte  $C_{k,m}$  liegen.

(Mögliches Ergebnis:  $F: x_1 + x_2 + 2x_3 - 4 = 0$ )

11.2 Zeigen Sie, dass die Ebene F auch in der Menge der Ebenen  $E_a$  enthalten ist.

11.3 Die Ebene F schneidet die  $x_1$ -Achse im Punkt  $S_1$  und die  $x_2$ -Achse im Punkt  $S_2$ . Diese Punkte bilden mit dem Koordinatenursprung und dem Punkt  $P(1/1/1)$  eine dreiseitige Pyramide. Berechnen Sie die Volumenmaßzahl dieser Pyramide.

11.4 Es gibt zwei verschiedene Ebenen  $E_{a_1}$  und  $E_{a_2}$ , die mit der Ebene F jeweils einen Winkel von  $45^\circ$  einschließen. Bestimmen Sie die zugehörigen Werte  $a_1$  und  $a_2$  auf zwei Nachkommastellen gerundet.

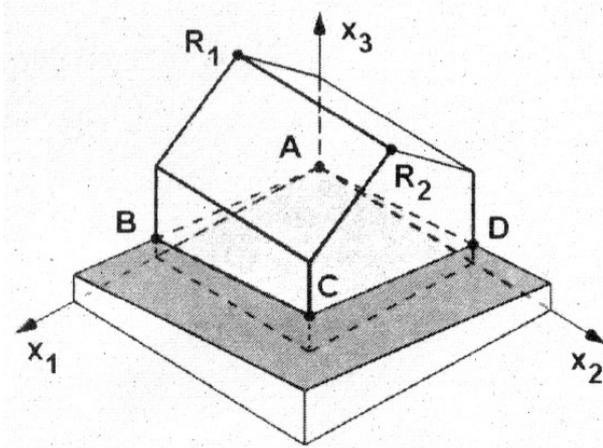
11.5 Zeigen Sie, dass die Gerade g mit der Gleichung  $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$  mit  $v \in \mathbb{R}$ ,

in allen Ebenen  $E_a$  enthalten ist und berechnen Sie den Abstand des Koordinatenursprungs von dieser Geraden g mithilfe des Lotfußpunktes L.

12.0 Die folgenden Informationen beziehen sich auf ein kartesisches Koordinatensystem des  $\mathbb{R}^3$ . Für die Einheiten auf den Koordinatenachsen gilt jeweils 1 LE = 1 m. Auf das Mitführen der Einheiten bei den Berechnungen kann verzichtet werden. Ergebnisse sind gegebenenfalls auf eine Nachkommastelle zu runden.

An einem Hang soll eine Scheune errichtet werden mit den Eckpunkten  $A(0/0/0)$ ,  $B(8/0/0,4)$ ,  $C(8/8/0,8)$  und  $D(0/8/0,4)$ , die in einer Ebene liegen. Die vier Seitenwände der Scheune verlaufen senkrecht zur  $x_1x_2$ -Ebene. Die Scheune soll in dem Viereck ABCD in den Hang hineinragen und ihr Boden soll in der  $x_1x_2$ -Ebene verlaufen, weshalb ein Teil des Hanges abgetragen werden muss. (Abitur 2013 BII)

12.1 Zeigen Sie, dass das Viereck ABCD ein Parallelogramm, aber kein Rechteck ist und berechnen Sie dessen Flächeninhalt. Berechnen Sie außerdem das Volumen der Erde, die vom Hang abgetragen werden muss.



12.2 Die eine Dachfläche liegt in der Ebene  $E: -3x_1 + 4x_3 = 16$ . In der anderen Dachfläche liegen die Punkte  $U(6/1/5,5)$ ,  $V(4/4/7)$  und  $W(8/6/4)$ , durch welche auch die Ebene  $F$  festgelegt wird. Die beiden Dachflächen treffen im Dachfirst aufeinander und werden durch die Seitenwände der Scheune begrenzt.

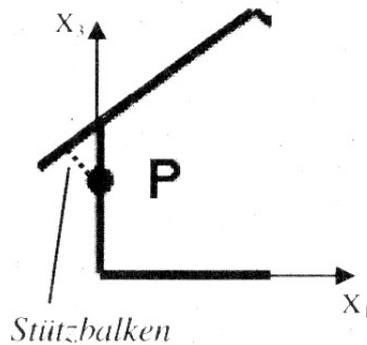
Beschreiben Sie die Lage der Ebene  $E$  im Koordinatensystem und ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene  $E$  in Parameterform. Stellen Sie außerdem die Gleichung der Ebene  $F$  in parameterfreier Form auf.

(Mögliches Teilergebnis:  $F: 1,5x_1 + 2x_3 = 20$ )

12.3 Berechnen Sie die Neigungswinkel  $\beta_E$  und  $\beta_F$  der beiden Dachflächen bzgl. der  $x_1x_2$ -Ebene und den Winkel  $\gamma$ , unter dem die beiden Dachflächen aufeinandertreffen.

12.4 Bestimmen Sie die Koordinaten der beiden Endpunkte  $R_1$  und  $R_2$  des Dachfirsts.

- 12.5 Die Dachflächen sollen nun über die Scheunenwände hinaus verlängert werden. Zur Stabilisierung werden Stützbalken zwischen den Seitenwänden und den verlängerten Dachflächen angebracht. Eine dieser Stützen soll an einer Seitenwand im Punkt  $P(0/4/3)$  angebracht werden. Berechnen Sie die Mindestlänge dieser Stütze und bestimmen Sie den anderen Endpunkt  $L$  dieser Stütze.



- 13.0 In einem kartesischen Koordinatensystem des  $\mathbb{R}^3$  mit dem Ursprung  $O$  sind der Punkt  $P(7/-2/8)$  und die Ebenen  $E$ ,  $F$  und  $G_k$  mit  $k \in \mathbb{R}$  gegeben:

$$E: -4x_1 - x_2 + x_3 + 18 = 0 \quad F: 2x_1 + x_2 - 12 = 0 \quad G_k: x_2 + x_3 + k = 0.$$

(Abitur 2014 BI)

- 13.1 Ermitteln Sie eine Gleichung der Schnittgeraden  $s$  der Ebenen  $E$  und  $F$ .

(Mögliches Ergebnis:  $s: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0,5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$ )

- 13.2 Bestimmen Sie alle Werte von  $k$ , für die die drei Ebenen  $E$ ,  $F$  und  $G_k$  jeweils keinen gemeinsamen Punkt haben.

- 13.3 Zusätzlich sind die Gerade  $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  mit  $\mu \in \mathbb{R}$  und der Punkt

$Q(4/4/2)$  gegeben. Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte  $S_1$  und  $S_2$  auf der Geraden  $h$  so, dass das Volumen der jeweiligen Pyramide  $OPQS_1$  und  $OPQS_2$  die Maßzahl 27 hat.

14.0 Ein Fluglotse beobachtet zwei Flugzeuge gleichzeitig, deren jeweilige Position  $F_1$  und  $F_2$  sich in einem geeignet gewählten kartesischen Koordinatensystem des  $\mathbb{R}^3$  in einem bestimmten Zeitraum durch folgende Gleichungen beschreiben lassen:

$$\vec{OF}_1 = \begin{pmatrix} -5,6 \\ -5,8 \\ 1,8 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,8 \\ 0,2 \end{pmatrix}, t_1 \in [0;30]$$

$$\vec{OF}_2 = \begin{pmatrix} -7,8 \\ 0,8 \\ 4,0 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,1 \\ 0 \end{pmatrix}, t_2 \in [0;30]$$

Die Koordinaten von  $\vec{OF}_1$  und  $\vec{OF}_2$  haben die Einheit km, die Parameter  $t_1$  und  $t_2$  beschreiben jeweils die nach dem gleichzeitigen Beobachtungsbeginn verstrichene Zeit in Minuten. Auf das Mitführen der Einheiten bei den Berechnungen kann verzichtet werden. (Abitur 2014 BI)

14.1 Zeigen Sie, dass sich die Flugbahnen schneiden, es aber zu keiner Kollision kommt.

14.2 Weisen Sie nach, dass zum Zeitpunkt  $t$  ab Beobachtungsbeginn für den Abstand  $d(t)$  zwischen beiden Flugzeugen gilt:  $d(t) = \sqrt{0,57t^2 - 9,24t + 53,24}$ . Bestimmen Sie außerdem den Zeitpunkt  $t_{\min}$  (gerundet auf eine Nachkommastelle), zu dem der quadrierte Abstand (also  $d(t)^2$ ) am geringsten ist.

15.0 In einem kartesischen Koordinatensystem des  $\mathbb{R}^3$  mit dem Ursprung  $O$  sind die Punkte  $A(1/3/-2)$ ,  $B_k(k/0/1)$  mit  $k \in \mathbb{R}$  und  $C(-1/6/0)$  sowie die Ebene  $E: 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4$  gegeben. (Abitur 2014 BII)

15.1 Die Ebene  $E$  schneidet die Koordinatenachsen in den Punkten  $X$ ,  $Y$  und  $Z$ . Bestimmen Sie das Volumen der Pyramide  $OXYZ$ .

15.2.0 Die Ebene  $H_k$  enthält das Dreieck  $AB_kC$  und wird beschrieben durch die Gleichung  $H_k: -15x_1 - (2k+4)x_2 + (3k-9)x_3 = -12k-9$  (Nachweis nicht erforderlich).

15.2.1 Untersuchen Sie, für welche Werte von  $k$  sich die Ebenen  $E$  und  $H_k$  in einer gemeinsamen Geraden schneiden.

15.2.2 Berechnen Sie für  $k = 3$  eine Gleichung der Schnittgeraden von  $E$  und  $H_3$  sowie den Schnittwinkel zwischen  $E$  und  $H_3$  auf eine Nachkommastelle gerundet.

15.2.3 Bestimmen Sie den Wert für  $k$  so, dass  $H_k$  den Ursprung enthält. Untersuchen Sie anschließend, ob in diesem Fall der Ursprung  $O$  im Inneren des Dreiecks  $AB_kC$  liegt. (Teilergebnis:  $k = -0,75$ )

16.0 In einem kartesischen Koordinatensystem des  $\mathbb{R}^3$  sind die Ebenen  $E_a$  und  $F$  sowie die Gerade  $h$  gegeben. Dabei gilt:

$$E_a: 2a \cdot x_1 - (a-1) \cdot x_3 + 2 = 0 \text{ mit } a \in \mathbb{R} \text{ und } h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Die Ebene  $F$  enthält die Gerade  $h$  und verläuft parallel zur  $x_2$ -Achse. (Abitur 2015 BI)

16.1 Stellen Sie eine Gleichung der Ebene  $F$  in Koordinatenform auf.

(Mögliches Teilergebnis:  $F: x_1 + 2x_3 - 1 = 0$ )

16.2 Untersuchen Sie die gegenseitige Lage von  $h$  und  $E_a$  in Abhängigkeit von  $a$ .

16.3 Untersuchen Sie, ob sich die Ebenen  $E_a$  und  $F$  senkrecht schneiden können, und für welchen Wert von  $a$  die Ebenen  $E_a$  und  $F$  parallel sind.

16.4 Ermitteln Sie alle Werte von  $a$ , für die sich die Ebenen  $E_a$  und  $F$  unter einem Winkel von  $45^\circ$  schneiden.

17.0 Beim Bau einer neuen Zahnradbahn ist ein Bergmassiv zu untertunneln

(siehe Schnittskizze – nicht maßstäblich).

Um die Bauzeit des Tunnels zu verkürzen, wird von den Punkten A und B aus gleichzeitig je eine zylinderförmige Tunnelröhre mit einem Radius von 2 m gebohrt.

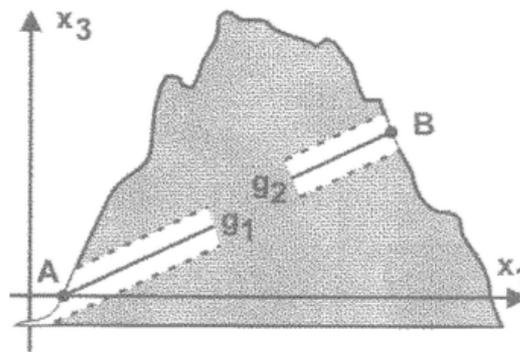
Für die Berechnungen wird ein kartesisches Koordinatensystem des  $\mathbb{R}^3$  verwendet.

In diesem Koordinatensystem gilt  $A(2/100/0)$  und  $B(1002/350/254)$ . Die Mittelachsen der Tunnelröhren liegen auf den Geraden  $g_1$  bzw.  $g_2$ . Vom Punkt A aus wird in Richtung

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und vom Punkt B aus in die Gegenrichtung gebohrt. Alle Koordinaten sind in

Meter angegeben. Auf das Mitführen der Einheiten kann bei den Berechnungen verzichtet werden. (Abitur 2015 BI)



17.1 Weisen Sie nach, dass der Punkt B genau 4 m oberhalb (in  $x_3$ -Richtung) von  $g_1$  liegt.

17.2 Untersuchen Sie, ob bei diesen Verhältnissen die Tunnelröhren wenigstens teilweise aufeinander treffen.

18.0 In einem kartesischen Koordinatensystem des  $\mathbb{R}^3$  sind die Geraden  $g_1$ ,  $g_2$  und die Ebene F gegeben:

$$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}; \quad g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R};$$

$$F: 2x_1 + 5x_2 + 8x_3 - 11 = 0$$

(Abitur 2015 BII)

18.1 Begründen Sie, dass die Geraden  $g_1$  und  $g_2$  eine Ebene E aufspannen und bestimmen Sie eine Gleichung dieser Ebene E in Parameterform und in Koordinatenform.

(Mögliches Teilergebnis:  $E: x_1 + 4x_2 + 7x_3 - 10 = 0$ )

18.2 Die Ebenen E und F schneiden sich in der Geraden s. Bestimmen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden s.

$$\text{(Mögliches Teilergebnis: } s: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \text{)}$$

18.3 Berechnen Sie die Größe des Schnittwinkels der Ebenen E und F. Runden Sie das Ergebnis auf eine Nachkommastelle.

18.4 Ermitteln Sie den Abstand der parallelen Geraden s und  $g_1$ .

Zusätzlich zu den Ebenen E und F aus Aufgabe 18 sind nun die Ebenen

$$H_a: ax_1 + 6x_2 + 9x_3 = 12 \text{ mit } a \in \mathbb{R} \text{ gegeben.}$$

18.5 Prüfen Sie, ob eine der Ebenen  $H_a$  zu F parallel ist.

18.6 Bestimmen Sie alle Werte von a so, dass für den Abstand  $d_a$  des Ursprungs 0 von

$$\text{der Ebene } H_a \text{ gilt: } d_a = \frac{12}{11}.$$

18.7 Bestimmen Sie den Wert von a, für den die Normalenvektoren der Ebenen E, F und  $H_a$  keine Basis des  $\mathbb{R}^3$  bilden.

19.0 In einem kartesischen Koordinatensystem des  $\mathbb{R}^3$  sind die Punkte  $A(8/5/6)$ ,  $B(4/1/-1)$ ,  $P_a(2/a/-1)$  und  $Q_b(-2b/b/b+1)$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$  sowie die Geraden  $h_1$  und  $h_2$  gegeben:

$$h_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}; \quad h_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R}$$

Die Geraden  $h_1$  und  $h_2$  spannen die Ebene E auf. (Abitur 2016 BI)

19.1 Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E in Normalenform.

19.2 Die Ebene  $E: 4x_1 + 4x_2 + 7x_3 - 13 = 0$  schneidet die  $x_1$ - $x_3$ -Ebene in der Geraden s.

Ermitteln Sie eine Gleichung von s.

19.3 Die Gerade g geht durch den Punkt A und schneidet die Ebene E im Punkt  $P_a$ .

Ermitteln Sie eine Gleichung von g.

19.4 Berechnen Sie den Abstand des Punktes A von der Ebene E sowie die Koordinaten des Spiegelpunktes  $A'$ , der durch Spiegelung des Punktes A an der Ebene E entsteht.

19.5 Prüfen Sie, ob es einen Wert für den Parameter b gibt, sodass die Vektoren  $\overrightarrow{BA}$  und  $\overrightarrow{BQ_b}$  orthogonal sind.

19.6 Berechnen Sie die Maßzahl des Volumens der dreiseitigen Pyramide  $ABQ_2P_3$ .

19.7 Gegeben ist zusätzlich die Geradenschar  $f_c$ :

$$f_c: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + \kappa \cdot \begin{pmatrix} c-1,5 \\ c^2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mit } \kappa, c \in \mathbb{R}.$$

Untersuchen Sie, für welche Werte von  $c$  sich die Gerade

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ mit } u \in \mathbb{R} \text{ mit einer Geraden aus der Geradenschar } f_c \text{ schneidet.}$$

20.0 Ein Meeresgebiet ist festgelegt durch die Koordinaten eines ruhenden Forschungsschiffes  $F(6000/1000/0)$ , den Fußpunkt eines Leuchtturms  $L(200/5000/0)$  sowie eines zunächst an der Wasseroberfläche fahrenden Unterseeboots mit  $U_k(40-2k/-20/0)$  mit  $k \in \mathbb{R}$ .

Die angegebenen Koordinaten stellen Punkte in einem dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystem dar. Seegang, Drift und Wind sowie die Erdkrümmung bleiben bei den Berechnungen unberücksichtigt.

Die Koordinaten sind alle in Meter angegeben, auf das Mitführen der Einheit Meter kann bei den Berechnungen verzichtet werden. (Abitur 2016 BII)

20.1 Zeigen Sie, dass sich das U-Boot geradlinig auf der Wasseroberfläche bewegt und berechnen Sie den minimalen Abstand des U-Bootes vom Forschungsschiff.

20.2.0 Für die folgenden Teilaufgaben gilt  $k = 10$ , somit  $U_{10}(20/-20/0)$ .

20.2.1 Untersuchen Sie, ob sich ein Blauwal an der Position  $B(1587/2243/0)$  außerhalb oder innerhalb des von den Punkten  $F$ ,  $L$  und  $U_{10}$  begrenzten Seegebietes aufhält.

20.2.2 Die Funksignale werden zwischen Forschungsschiff  $F$ , der Spitze des Leuchtturms  $S(200/5000/50)$  und dem Unterseeboot ausgetauscht.

Die Punkte  $F$ ,  $S$  und  $U_{10}$  liegen in einer Ebene  $E$ . Bestimmen Sie je eine Gleichung der Ebene  $E$  in Parameter- und in Koordinatenform.

(mögliches Teilergebnis:  $E: 51x_1 - 299x_2 + 29836x_3 - 7000 = 0$ )

20.2.3 Bestimmen Sie die Koordinaten aller Punkte, die sowohl in der Wasseroberfläche als auch in der Ebene  $E$  aus 20.2.2 liegen.

20.3.0 Von der Position  $U_{10}$  taucht das U-Boot geradlinig in Richtung  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 120 \\ 300 \\ -100 \end{pmatrix}$  bis in

eine Wassertiefe von 200 Metern zum Tauchpunkt  $T$  ab.



20.3.1 Berechnen Sie die Koordinaten des Tauchpunktes T und die beim Tauchvorgang zurückgelegte Strecke. Runden Sie auf ganze Meter.

20.3.2 Laut Herstellerangaben darf das Tauchboot beim Tauchvorgang einen maximalen Tauchwinkel von 16 Grad gegenüber der Horizontalen nicht überschreiten. Prüfen Sie das Einhalten der Vorgaben durch Berechnung.

21.0 Im  $\mathbb{R}^3$  sind die Geraden  $g_q$  und  $h$  gegeben:

$$g_q: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ q \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3q-1 \\ 2q \\ q+1 \end{pmatrix} \text{ mit } q, \lambda \in \mathbb{R}; \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ mit } \mu \in \mathbb{R}.$$

(Abitur 2017 BI)

21.1 Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der zwei Geraden  $g_q$  und  $h$  in Abhängigkeit von  $q$ .

21.2.0 Setzen Sie nun  $q = -1$ .

21.2.1 Ermitteln Sie den Schnittwinkel der Geraden  $g_{-1}$  und  $h$  auf eine Nachkommastelle gerundet.

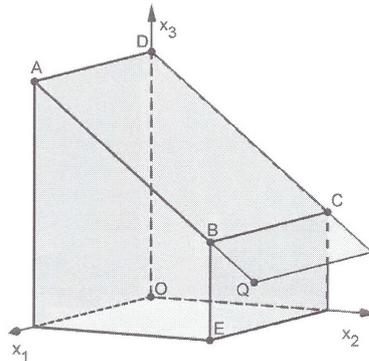
21.2.2 Die Gerade  $g_{-1}$  und  $h$  legen eine Ebene  $E$  fest. Bestimmen Sie je eine Gleichung der Ebene  $E$  in Parameterform und in Normalenform.

22.0 Die Abbildung zeigt einen Wintergarten, dessen Boden in der  $x_1$ - $x_2$ -Ebene eines kartesischen Koordinatensystems liegt. Das rechteckige Glasdach ABCD ist von einer Markise bedeckt. Dabei wird der Abstand zwischen Glasdach und Markise vernachlässigt. Die Ebene, in der die Markise liegt, wird mit M bezeichnet. Folgende Punkte des Wintergartens sind gegeben:

A(5/0/5), B(5/4/2), D(0/0/5) und E(5/4/0).

A(5/0/5), B(5/4/2), D(0/0/5) und E(5/4/0).

Alle Koordinaten sind in Metern angegeben. Auf das Mitführen der Einheiten kann bei den Berechnungen verzichtet werden. (Abitur 2017 BII)



22.1 Die Markise lässt sich in Verlängerung des Glasdaches über die untere Dachkante [BC] um 1,25 m bis zum Punkt Q (siehe Skizze) ausfahren.

Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes Q.

(Ergebnis: Q(5/5/1,25))

22.2 Geben Sie eine Gleichung der Ebene M in Parameterform an und formen Sie diese in eine Koordinatenform um.

(Mögliches Teilergebnis:  $M: 3x_2 + 4x_3 - 20 = 0$ )

22.3 Berechnen Sie das Volumen des Wintergartens in  $\text{m}^3$ .

22.4 Mithilfe zweier Drahtseile, die an den schrägen Dachstreben [AB] und [DC] befestigt werden, soll eine Leuchte im Wintergarten im Punkt  $U(2,4/1,5/2,8)$  aufgehängt werden. Ermitteln Sie die Mindestlänge des Drahtseils, das an der Strebe befestigt wird, welche weiter von U entfernt ist.

Runden Sie das Ergebnis auf cm.

22.5.0 Damit sich der Wintergarten bei Sonnenschein nicht zu stark aufheizt, ist die Markise jetzt bis zum Punkt Q ausgefahren. Die Richtung der einfallenden Sonnenstrahlen

wird durch den Vektor  $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0,8 \\ -1,4 \end{pmatrix}$  beschrieben.

22.5.1 Ohne Markise verlief der Sonnenstrahl  $s$  durch den Punkt E. Geben Sie eine Gleichung für die Gerade  $s$  an und berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts T von  $s$  mit der Markisenebene M.  
(Ergebnis: T(4/4,8/1,4))

22.5.2 Erläutern Sie ohne Rechnung, ob der Punkt E bei diesem Sonnenstand im Schatten der ausgefahrenen Markise liegt.

23.0 Ein Hotel wurde in Form einer vierseitigen Pyramide mit gleich großen gläsernen Seitenflächen gebaut. In einem kartesischen Koordinatensystem des stellen die Punkte A(2/1/3), B(2/31/3), C(-28/31/3) und D(-28/1/3) die Eckpunkte der Grundfläche und der Punkt S(-13/16/30) die Spitze der Pyramide dar. In der Nähe des Hotels befindet sich ein Kanal, dessen Uferlinie in einem bestimmten Bereich geradlinig

verläuft und modellhaft durch die Gerade  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 27 \\ -24 \\ 3 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  mit  $k \in \mathbb{R}$

beschrieben werden kann.

Alle Koordinaten sind in der Einheit Meter angegeben. Auf das Mitführen der Einheiten kann bei den Berechnungen verzichtet werden. (Abitur 2018 BII)

23.1 Zeigen Sie, dass die Grundfläche ABCD des Hotels quadratisch ist.

23.2 Die Kante  $\overline{AB}$  des Hotels liegt auf der Geraden  $s$ . Stellen Sie eine Gleichung der Geraden  $s$  auf und zeigen Sie, dass  $s$  echt parallel zur Geraden  $g$  verläuft.

23.3 Die Grundfläche ABCD der Pyramide und die Gerade  $g$  liegen in der Ebene E. Bestimmen Sie jeweils eine Gleichung der Ebene E in Parameter- sowie in Koordinatenform und beschreiben Sie die besondere Lage der Ebene E im Koordinatensystem.

23.4 Eine Reinigungsfirma wird mit der fachgerechten Reinigung der gläsernen Seitenflächen des Hotels beauftragt. Berechnen Sie die Mantelfläche der Pyramide und ermitteln Sie die Kosten der Reinigung auf Euro gerundet, wenn für  $1 \text{ m}^2$  gereinigte Fläche 5 Euro veranschlagt werden.

23.5 Ein Fassadenkletterer befindet sich auf der Kante  $\overline{BS}$  der Pyramide. Berechnen Sie den Neigungswinkel der Kante  $\overline{BS}$  zur Grundfläche ABCD. Runden Sie Ihr Ergebnis auf zwei Nachkommastellen.

23.6 Ein Kanal-Passagierschiff passiert nachts das Hotel. Vom Punkt  $Q(27/-3/3)$  wird vom

Schiff ein Lichtstrahl in Richtung des Vektors  $\vec{v} = \begin{pmatrix} -30 \\ 19 \\ 9 \end{pmatrix}$  gesendet.

Zeigen Sie, dass der Lichtstrahl die gläserne Seitenfläche ABS des Hotels trifft.

24.0 Im  $\mathbb{R}^3$  sind die drei linear unabhängigen Vektoren  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$  gegeben.

Entscheiden und begründen Sie, welche der folgenden Aussagen stets richtig, möglich oder immer falsch sind. (Abitur 2018 BI)

24.1  $|\vec{a} \times \vec{b}| > 0$

24.2  $\vec{a} \circ \vec{b} = 0$

24.3  $\left| (\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c} \right| = \left| (\vec{a} \times \vec{c}) \circ \vec{b} \right|$

24.4 Es existiert eine Ebene, in der alle drei Vektoren  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$  liegen.

24.5 Es gibt einen Vektor im  $\mathbb{R}^3$ , der sich nicht als Linearkombination der Vektoren  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$  bilden lässt.

25.0 In einem kartesischen Koordinatensystem des  $\mathbb{R}^3$  sind die Punkte  $A(1|3|-2)$ ,  $B_k(k|2|-1)$  und  $C_k(4|k+2|-1)$  mit  $k \in \mathbb{R}$  gegeben. (Abitur 2019 Teil 1)

25.1 Prüfen Sie, ob es Werte für  $k$  gibt, so dass die Punkte  $A$ ,  $B_k$  und  $C_k$  auf einer Geraden liegen.

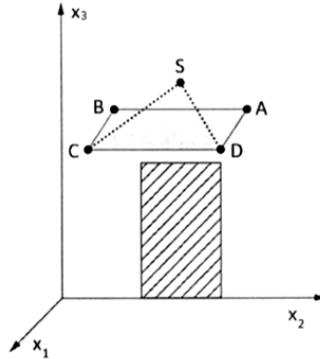
25.2 Bestimmen Sie für  $k = 1$  eine Gleichung der Ebene  $E$  in Koordinatenform, in der die Punkte  $A$ ,  $B_1$  und  $C_1$  liegen.

26.0 In einem kartesischen Koordinatensystem des  $\mathbb{R}^3$  sind die Ebenen  $E$  und  $F$  mit  $E: x_1 + 2x_2 - x_3 = 2$  und  $F: 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 4$  gegeben. (Abitur 2019 Teil 2 GII)

26.1 Der Ursprung des Koordinatensystems wird an der Ebene  $E$  gespiegelt. Bestimmen Sie die Koordinaten des Bildpunktes  $P$ .

26.2 Ermitteln Sie eine Gleichung der Geraden  $s$ , in der sich die Ebenen  $E$  und  $F$  schneiden.

27.0 Über einer Haustüre soll ein nach unten geneigtes, rechteckiges Vordach angebracht werden. Zur geometrischen Beschreibung des Vordaches wird ein kartesisches Koordinatensystem derart festgelegt, dass die ebene Grundfläche des Hauses in der  $x_1$ - $x_2$ -Ebene des Koordinatensystems liegt und die vordere linke vertikale Kante des quaderförmigen Hauses entlang der  $x_3$ -Achse verläuft (siehe Skizze).



Die Befestigung des Vordachs am Haus erfolgt an den Punkten  $A(0|2,5|3)$  und  $B(0|1|3)$  sowie durch zwei Drahtseile (gepunktete Linien). Diese werden an den Punkten  $C(1,5|1|2,5)$  und  $D(1,5|2,5|2,5)$  des Vordaches angebracht und jeweils im Punkt  $S$  der Hauswand verankert. Der Punkt  $S$  ist von den Punkten  $A$  und  $B$  gleich weit entfernt. Vernachlässigen Sie für die Bearbeitung der folgenden Aufgaben die Dicke der Platte, aus der das Vordach besteht, sowie den Durchmesser der Drahtseile. Die Koordinaten der Punkte sind Längenangaben in der Einheit Meter. Auf die Verwendung von Einheiten kann bei den Berechnungen verzichtet werden. (Abitur 2019 Teil 2 GII)

27.1 Bestimmen Sie alle möglichen Koordinaten des Punktes  $S$ , wenn die Hauswand vom Boden aus gemessen die Höhe 5 Meter aufweist.

27.2.0 Der Anker für die beiden Drahtseile wird schließlich im Punkt  $S(0|1,75|4)$  gesetzt.

27.2.1 Ermitteln Sie, wie viele Meter Drahtseil zur Aufhängung des Vordaches mindestens bestellt werden müssen, wenn insgesamt ein halber Meter Reserve für die Befestigungen eingeplant wird.

27.2.2 Berechnen Sie den Winkel, den ein Drahtseilstück mit dem Vordach einschließt. Runden Sie das Ergebnis auf zwei Nachkommastellen.

27.2.3 Um das Vordach zu stabilisieren, soll jeweils von den Punkten  $C$  und  $D$  ausgehend eine geradlinige Stütze angebracht werden. Diese sollen senkrecht zum Vordach verlaufen. Prüfen Sie, ob diese beiden Stützen an der Hausaußenwand oder im Boden vor dem Haus verankert werden müssen.

28.0 In einem kartesischen Koordinatensystem des  $\mathbb{R}^3$  sind die Ebene E und die Gerade g

$$\text{gegeben: } E: \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ mit } \lambda \in \mathbb{R}$$

(Abitur 2019 Nachtermin Teil 1)

28.1 Weisen Sie durch Rechnung nach, dass der Aufpunkt der Geraden g zugleich in der Ebene E liegt.

28.2 Begründen Sie ohne Rechnung, ob die Gerade g die Ebene E senkrecht schneidet.

29.0 Zwei Motordrachenflieger treten gleichzeitig zum Zeitpunkt  $t_0 = 0$  in denselben

Luftraum ein. Ihre jeweilige Position darin wird durch die Punkte  $F_1$  und  $F_2$  in einem geeignet gewählten kartesischen Koordinatensystem des  $\mathbb{R}^3$  beschrieben, wobei die  $x_3$ -Koordinate die Flughöhe des Motordrachenfliegers in Meter über der vereinfacht als eben angenommenen Erdoberfläche angibt, welche in der  $x_1$ - $x_2$ -Ebene liegt.

Alle verwendeten Koordinaten sind Längenangaben und haben die Einheit Meter. Die Parameter  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$  mit  $t_1 \geq 0$  und  $t_2 \geq 0$  sind die seit Eintritt in den Luftraum

verstrichenen Zeit t in Sekunden. Die Flugbahnen  $f_1$  von  $F_1$  und  $f_2$  von  $F_2$  der beiden Motordrachenflieger lassen sich für einen Zeitraum von 100 Sekunden nach Eintritt in diesen Luftraum wie folgt beschreiben:

$$f_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 150 \\ 20 \\ 125 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad f_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 665 \\ 50 \\ 225 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen der Einheiten verzichtet werden.

29.1 Weisen Sie rechnerisch nach, dass sich die Flugbahnen  $f_1$  und  $f_2$  der beiden Motordrachenflieger in diesem Luftraum schneiden. Entscheiden Sie mit Begründung, ob es zu einer Kollision kommt.

29.2 Die Sonne steht zu dieser Tageszeit senkrecht über der Erdoberfläche.

Geben Sie eine Gleichung der Geraden s an, auf der der Schatten des Motordrachenfliegers beim Flug entlang der Bahn  $f_1$  auf der Erdoberfläche verläuft.

30.0 In einem kartesischen Koordinatensystem des  $\mathbb{R}^3$  sind die Ebenen F und  $H_a$  gegeben:

$$F: x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0$$

$$H_a: ax_1 + (4-a)x_2 + 2ax_3 - 5 = 0 \text{ mit } a \in \mathbb{R}$$

(Abitur 2019 Nachtermin Teil 2)

30.1 Ermitteln Sie sämtliche Werte für a, für die sich die Ebenen F und  $H_a$  in einer Geraden schneiden.

30.2 Für  $a = 3$  schneiden sich die Ebenen  $F$  und  $H_3$ . Berechnen Sie den Schnittwinkel zwischen  $F$  und  $H_3$  auf eine Nachkommastelle gerundet.

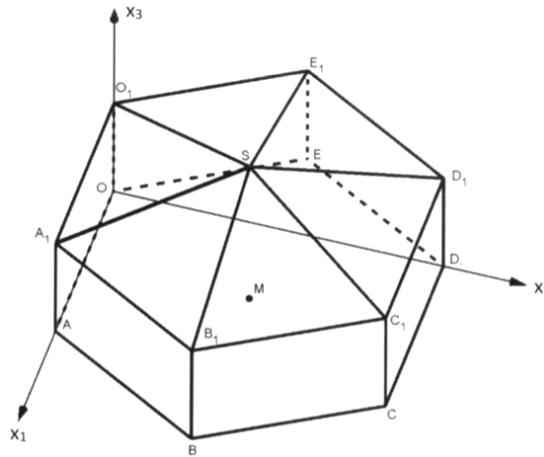
31.0 In einem kartesischen Koordinatensystem des  $\mathbb{R}^3$  sind die Ebene  $E: x_1 + 3x_3 = 0$  und

die Gerade  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  mit  $\lambda \in \mathbb{R}$  gegeben. (Abitur 2020 Teil 1)

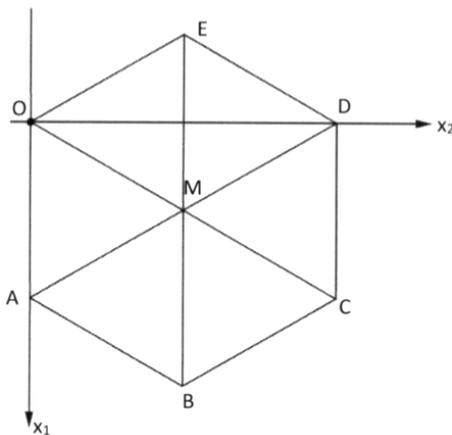
31.1 Geben Sie jeweils die besondere Lage von  $g$  und  $E$  im Koordinatensystem an.

31.2 Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes  $D$ , der von der Ebene  $E$  den Abstand  $d = \sqrt{10}$  besitzt.

32.0 Das Zelt eines Jugendzirkus weist die Form eines regelmäßigen Prismas mit aufgesetzter Pyramide auf und wird modellhaft in einem kartesischen Koordinatensystem des  $\mathbb{R}^3$  betrachtet. Die Grundfläche des Zeltes liegt in der  $x_1$ - $x_2$ -Koordinatenebene und ist ein regelmäßiges Sechseck  $OABCDE$  mit dem Mittelpunkt  $M(3|3\sqrt{3}|0)$ . Die Seiten des Sechsecks sind jeweils 6 m lang. Der Punkt  $O$  liegt im Koordinatenursprung,  $A$  hat die Koordinaten  $(6|0|0)$  und  $A_1$  die Koordinaten  $(6|0|4)$ . Das Dach des Zeltes wird durch eine regelmäßige sechseckige Pyramide gebildet. Die Spitze  $S$  des Zeltes liegt senkrecht über  $M$  in einer Höhe von 6 m. Die Koordinaten sind Längenangaben in der Einheit Meter. Auf die Mitführung von Einheiten während der Rechnungen kann verzichtet werden. Die Ergebnisse sind sinnvoll zu runden. (Abitur 2020 Teil 2 GI)



Zusätzlich zeigt die folgende Zeichnung den Grundriss

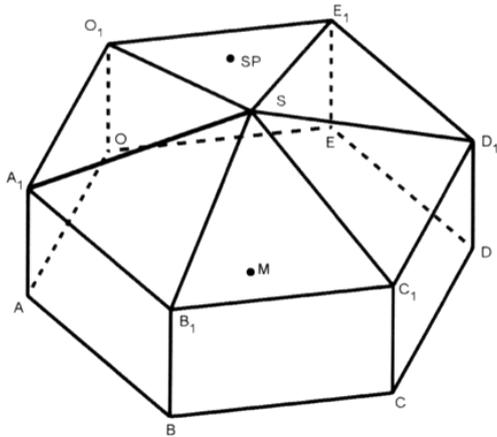


32.1 Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene  $F$  in Koordinatenform, welche durch die Punkte  $O_1(0|0|4)$ ,  $E_1(-3|3\sqrt{3}|4)$  und  $S(3|3\sqrt{3}|6)$  festgelegt wird.

(mögliches Ergebnis:  $F: x_1 + \frac{\sqrt{3}}{3}x_2 + 3x_3 = -12$ )

32.2 Berechnen Sie den Neigungswinkel der Ebene  $F$  aus Teilaufgabe 32.1 gegenüber der Grundfläche des Zeltes.

32.3 Vom Schwerpunkt SP des Dreiecks  $O_1SE_1$  soll senkrecht zur Ebene F ein Drahtseil bis zum Boden gespannt werden. Berechnen Sie die Länge dieses Seils.

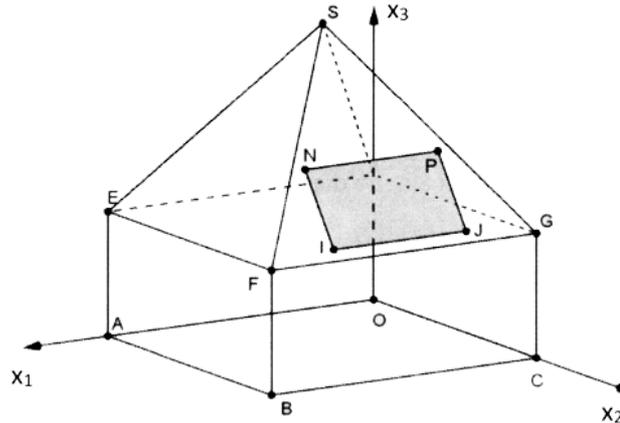


32.4 Zur Abendvorstellung soll ein Lichtstrahl auf die Seitenfläche  $OAA_1O_1$ , in der sich auch der Eingang befindet, treffen. Dazu wird auf einem Mast ein Spotlight installiert, dessen

Lichtstrahl durch  $\vec{h}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 10 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$  mit  $s \in \mathbb{R}^+$  beschrieben wird. Prüfen Sie, ob

der Lichtstrahl des Spotlights die Seitenfläche  $OAA_1O_1$  trifft. Geben Sie gegebenenfalls an, wie die Position des Spotlights am Mast verändert werden muss, damit die gewünschte Beleuchtung erzielt wird, wenn der Lichtstrahl nach wie vor parallel zu  $\vec{h}$  verlaufen soll.

33.0 Ein Haus hat die Form eines Quaders mit oben aufgesetzter Pyramide. Das Haus wird modellhaft in einem kartesischen Koordinatensystem des  $\mathbb{R}^3$  betrachtet. Der Punkt  $O$  liegt im Koordinatenursprung und die Punkte  $A$  und  $C$  liegen auf den Koordinatenachsen. Die Spitze  $S$  liegt senkrecht über dem Mittelpunkt der durch die Punkte  $O$ ,  $A$ ,  $B$  und  $C$  festgelegten quadratischen Grundfläche des Hauses. Die südliche Dachfläche wird durch die Punkte  $F(12|12|5)$ ,  $G(0|12|5)$  und  $S(6|6|13)$  begrenzt. Die Koordinaten sind Längenangaben in der Einheit Meter. Auf die Mitführung von Einheiten während der Rechnungen kann verzichtet werden. (Abitur 2020 Teil 2 GII)



33.1 Der Bauherr geht davon aus, dass bei einer Dachflächenneigung von mindestens  $50^\circ$  gegenüber der Grundfläche Schnee problemlos von der Dachfläche abrutschen kann. Untersuchen Sie, ob die Dachneigung des Hauses hierfür ausreicht.

33.2.0 Auf der südlichen Dachfläche ist ein Sonnenkollektor angebracht, der durch das Rechteck  $IJPN$  dargestellt wird. Die Kante  $I\bar{J}$  verläuft parallel zur Kante  $F\bar{G}$ .  
 Ferner gilt:  $I(9|11,7|5,4)$ ,  $J(3|11,7|5,4)$  und  $|\overline{IN}| = |\overline{JP}| = 3,5 \text{ m}$ .

33.2.1 Der Punkt  $M_{FG}$  ist der Mittelpunkt der Kante  $F\bar{G}$ . Erläutern Sie, dass der Vektor  $\overline{ON}$

mithilfe der Gleichung  $\overline{ON} = \overline{OI} + \frac{|\overline{IN}|}{|\overline{M_{FG}S}|} \cdot \overline{M_{FG}S}$  dargestellt werden kann und bestimmen

Sie die Koordinaten von  $N$ . (Ergebnis:  $N(9|9,6|8,2)$ )

33.2.2 Berechnen Sie den prozentualen Anteil der südlichen Dachfläche, die vom Sonnenkollektor bedeckt ist.

33.2.3 Die Position einer Satellitenanlage auf dem Dach eines Nachbarhauses lässt sich stark vereinfacht durch den Punkt  $Z(15|27|17)$  beschreiben. Die Einstrahlrichtung der Sonne wird zum Zeitpunkt des vermuteten Leistungsmaximums des Sonnenkollektors

durch den Vektor  $\vec{v} = \begin{pmatrix} -5 \\ -9 \\ -4 \end{pmatrix}$  beschrieben. Untersuchen Sie durch Rechnung, ob der

Schattenwurf der Satellitenanlage zum Zeitpunkt des vermuteten Leistungsmaximums innerhalb der Sonnenkollektorfläche liegt. Ermitteln Sie hierfür zunächst eine Gleichung der durch die südliche Dachfläche festgelegten Ebene  $E$  in geeigneter Darstellungsform.

34.0 Ein Bergwerk in Bolivien wird mithilfe eines kartesischen Koordinatensystems beschrieben. Die Erdoberfläche entspricht der  $x_1$ - $x_2$ -Ebene. Punkte mit negativer  $x_3$ -Koordinate liegen unterhalb der Erdoberfläche. Der Betrag der  $x_3$ -Koordinate gibt in diesem Fall die Tiefe unter der Erde an. Die röhrenförmigen Stollen des Bergwerks werden in diesem Modell durch Geradenstücke beschrieben, d.h. der Querschnitt der Röhren bleibt außer Betracht. Für die Einheiten auf den drei Koordinatenachsen gilt jeweils: 1 LE = 1 m. Auf die Verwendung von Einheiten kann bei den Berechnungen verzichtet werden.

Zwei der Stollen des Bergwerks werden beschrieben durch folgende Gleichungen:

$$\text{Stollen 1 durch } s_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -50 \\ -100 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ mit } s \in [-20; 75]$$

$$\text{Stollen 2 durch } s_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ -150 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ mit } t \in [-50; 70]$$

34.1 Geben Sie zunächst die geringste Tiefe des Stollens  $s_1$  unter der Erdoberfläche an. Ermitteln Sie dann das Volumen des Aushubmaterials, das beim Bau des Stollens  $s_1$  an die Erdoberfläche geschafft werden musste. Gehen Sie dabei davon aus, dass die röhrenförmigen Stollen eine durchschnittliche Querschnittsfläche von  $A = 7 \text{ m}^2$  besitzen. Runden Sie Ihr Endergebnis auf eine Nachkommastelle.

34.2 Untersuchen Sie den gegenseitigen Verlauf der beiden Stollen.

34.3 Vom Punkt  $A(175|200|-125)$  aus sollen der Stollen  $s_1$  durch einen horizontal verlaufenden Verbindungsstollen  $s_H$  mit dem Stollen  $s_2$  verbunden werden. Ermitteln Sie eine Gleichung für diesen Verbindungsstollen.

34.4 Durch ein Erdbeben ist der Verbindungsstollen unpassierbar und auch der von der Erdoberfläche aus nach unten führende Versorgungsschacht in Richtung des Stollens  $s_1$  ist eingestürzt.

Ein Rettungsteam plant nun eine senkrecht zur horizontalen Ebene verlaufende Notbohrung. Dabei soll die Bohrung so durchgeführt werden, dass beide Stollen durch eine einzige Bohrung eine Verbindung nach oben bekommen, um somit schnellstmöglich eingeschlossene Grubenarbeiter zu retten.

Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes N an der Erdoberfläche, von dem aus die Bohrung durchgeführt werden muss.

Bestimmen Sie auch, nach welcher Zeit die beiden Stollen jeweils erreicht werden, wenn davon ausgegangen wird, dass man für eine Tiefenbohrung von fünf Metern durchschnittlich eine Stunde Zeit benötigt.

35.0 In einem kartesischen Koordinatensystem des  $\mathbb{R}^3$  sind die Ebene  $E: -x_2 + x_3 = 5$  und der Punkt  $P(4|-2|4)$  gegeben. (Abitur 2021 Teil 1)

35.1 Zeigen Sie, dass der Punkt P nicht in der Ebene E liegt.

Geben Sie eine Gleichung der Geraden g durch den Punkt P an, die zur Ebene E senkrecht steht und bestimmen Sie den Schnittpunkt L von g und E.

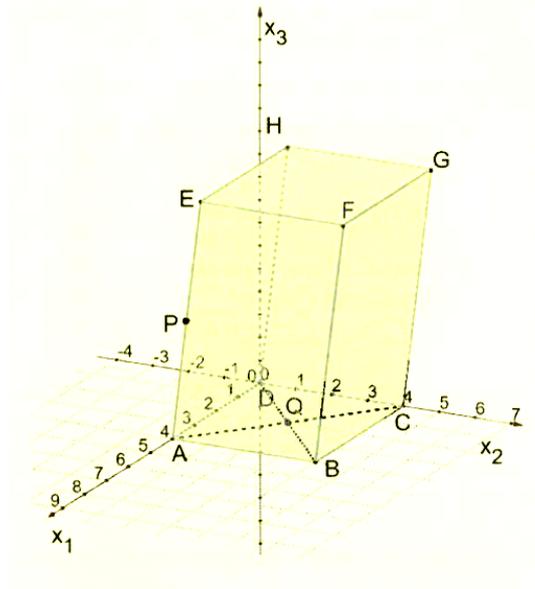
(Mögliches Teilergebnis:  $L(4|-1,5|3,5)$ )

35.2 Für den Punkt Q gilt:  $\vec{OQ} = \vec{OP} + 2 \cdot \vec{PL}$

Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes Q.

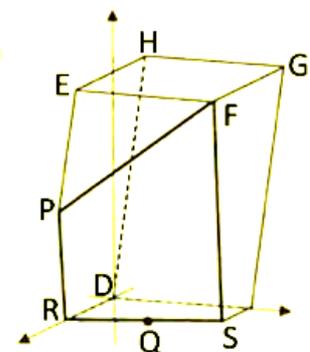
Fertigen Sie ohne Verwendung eines Koordinatensystems eine Skizze an, aus der die gegenseitige Lage der Punkte Q, P und der Ebene E hervorgeht.

36.0 Ein Holzklotz in Form eines Spats ABCDEFGH mit quadratischer Grundfläche soll bearbeitet werden. Er ist in einem kartesischen Koordinatensystem des  $\mathbb{R}^3$  modellhaft so dargestellt, dass die Seiten  $\overline{DA}$  sowie  $\overline{DC}$  auf der  $x_1$ - bzw.  $x_2$ -Achse liegen und D im Koordinatenursprung liegt. Die Seite  $\overline{AE}$  wird halbiert vom Punkt  $P(5|1|3)$ . Der Diagonalschnittpunkt der Grundfläche ABCD ist  $Q(2|2|0)$ . Die Koordinaten der Punkte sind Längenangaben in der Einheit Dezimeter. Auf die Mitführung von Einheiten während der Rechnungen kann verzichtet werden. (Abitur 2021 GI)



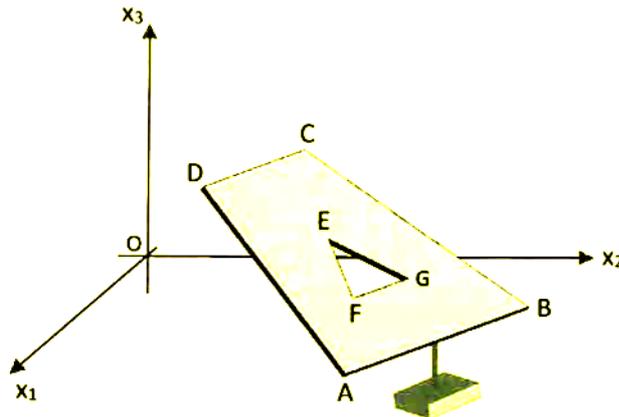
- 36.1 Lesen Sie die Koordinaten der Punkte A, B und C aus der Zeichnung ab. Ermitteln Sie rechnerisch die Koordinaten des Punktes E.
- 36.2 Die Punkte P, Q und  $F(6|6|6)$  legen die Ebene K fest. Ermitteln Sie jeweils eine Gleichung von K in Parameter- und Koordinatenform.  
 (Mögliches Teilergebnis:  $K: 9x_1 + 3x_2 - 8x_3 - 24 = 0$ )
- 36.3 Berechnen Sie den Winkel, unter dem die Gerade DF auf die Ebene K trifft.

36.4 Der Holzklotz wird entlang der Ebene K durchtrennt und der vordere Teil weggenommen. Dadurch ergibt sich in der Grundfläche ABCD eine Schnittkante, die die Kante  $\overline{DA}$  im Punkt R sowie die Kante  $\overline{CB}$  im Punkt S schneidet. Die Schnittfläche wird durch die Punkte P, R, S und F begrenzt (siehe Skizze). Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte R und S.



36.5 Erläutern Sie, wie Sie den Inhalt der Fläche PRSF berechnen können, ohne diese Rechnung konkret durchzuführen.

- 37.0 Eine Skulptur aus Leichtmetall in einer Kunsthalle hat die Form eines nicht symmetrischen Trapezes ABCD, aus dem ein Dreieck EFG ausgeschnitten wurde. Das Trapez wird modellhaft in einem kartesischen Koordinatensystem des  $\mathbb{R}^3$  betrachtet. Der Hallenboden liegt in der  $x_1$ - $x_2$ -Koordinatenebene und der Punkt O im Koordinatenursprung. Die Punkte  $A(7|7|2)$ ,  $B(3|10|2)$ ,  $C(1|4|5)$  und  $D(3|2,5|5)$  bilden die Eckpunkte des Trapezes. Die Koordinaten der Punkte sind Längenangaben in der Einheit Dezimeter. Auf die Mitführung von Einheiten während der Rechnung kann verzichtet werden. (Abitur 2021 GII)

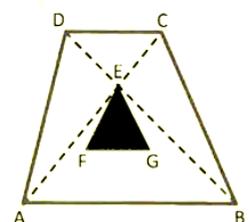


- 37.1 Die Punkte A, B und C legen die Ebene K fest. Ermitteln Sie jeweils eine Gleichung von K in Parameter- und Koordinatenform.  
(Mögliches Teilergebnis:  $K: 3x_1 + 4x_2 + 10x_3 = 69$ )

- 37.2 Berechnen Sie den Neigungswinkel der Trapezfläche ABCD gegenüber dem Hallenboden. Runden Sie Ihr Ergebnis auf zwei Nachkommastellen.

- 37.3 Erläutern Sie, wie Sie den Inhalt der Trapezfläche ABCD berechnen können, ohne diese Rechnung konkret durchzuführen. Hinweis: Die ausgeschnittene Dreiecksfläche EFG ist bei der Erläuterung nicht zu berücksichtigen.

- 37.4 Der Punkt E ist der Schnittpunkt der beiden Diagonalen  $\overline{AC}$  und  $\overline{BD}$  (siehe nebenstehende Skizze). Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes E.  
(Mögliches Ergebnis:  $E(3|5|4)$ )



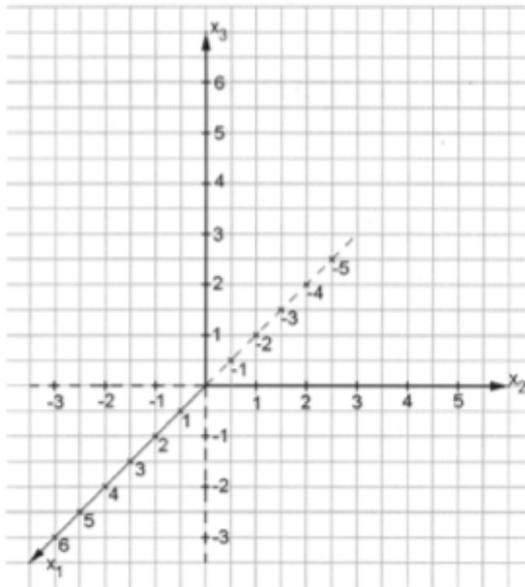
- 37.5 Für den Punkt F des Dreiecks EFG gilt:  $F(4,4|5,2|3,5)$ . Berechnen Sie die Maßzahl der Länge der Dreiecksseite  $\overline{EF}$  und die Koordinaten des Punktes G, wenn die Dreiecksseite  $\overline{FG}$  parallel zu  $\overline{AB}$  ist und  $|\overline{EF}| = |\overline{FG}|$  gilt.

38.0 In einem kartesischen Koordinatensystem des  $\mathbb{R}^3$  sind die Ebene  $E: 3x_1 - 5x_2 - 2x_3 = 10$  sowie die Punkte  $P(6|2|4)$  und  $Q(-6|22|12)$  gegeben. (Abitur 2022 Teil 1)

38.1 Ermitteln Sie eine Gleichung der Geraden  $g$ , die die Punkte  $P$  und  $Q$  enthält, und zeigen Sie, dass die Gerade  $g$  die Ebene  $E$  senkrecht schneidet.

38.2 Die Ebene  $F$  enthält den Punkt  $P$  und liegt parallel zur Ebene  $E$ . Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene  $F$ .

39.0 In einem kartesischen Koordinatensystem des  $\mathbb{R}^3$  sind die Punkte  $A(2|2|0)$ ,  $B(2|5|0)$ ,  $C(-3|2|0)$  und  $D(1|3|4)$  Eckpunkte der Pyramide  $ABCD$  mit der dreieckigen Grundfläche  $ABC$ . (Abitur 2022 Teil 1)



39.1 Zeichnen Sie die Pyramide  $ABCD$  in das unten abgebildete Koordinatensystem ein.

39.2 Die Gerade  $l$  steht senkrecht auf der Grundfläche  $ABC$  der Pyramide, verläuft durch den Punkt  $D$  und schneidet die Grundfläche  $ABC$  im Punkt  $L$ . Geben Sie die Gleichung der Geraden  $l$  sowie die Koordinaten des Schnittpunktes  $L$  an.

40.0 In einem kartesischen Koordinatensystem des  $\mathbb{R}^3$  sind der Punkt  $A(2|-1|-4)$  sowie

$$\text{die Geraden } g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } h_k: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4,5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} k \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ mit } \lambda, \mu, k \in \mathbb{R}$$

gegeben. Es gilt  $A \notin g$ . Somit legen der Punkt  $A$  und die Gerade  $g$  eine Ebene  $E$  fest. (Abitur 2022 GI)

40.1 Ermitteln Sie je eine Gleichung der Ebene  $E$  in Parameter- und in Koordinatenform. (mögliches Teilergebnis:  $E: x_1 - 2x_2 - 4 = 0$ )

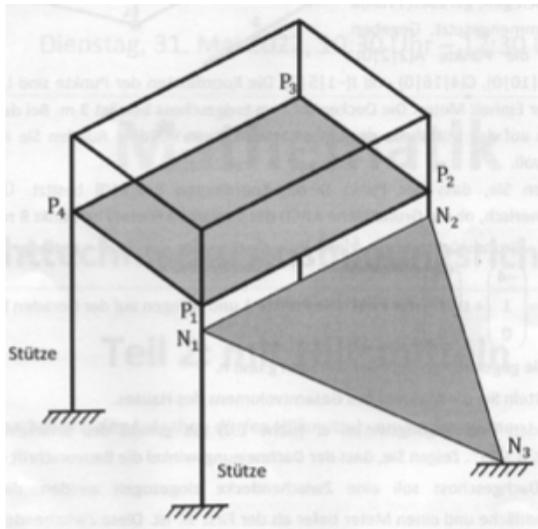
40.2 Bestimmen Sie den Wert von  $k$  so, dass sich die Geraden  $g$  und  $h_k$  in einem Punkt  $S$  schneiden und berechnen Sie die Koordinaten dieses Schnittpunktes  $S$ .

40.3 Für  $k = -4$  ergibt sich die Gerade  $h_{-4} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4,5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

Zeigen Sie, dass die Gerade  $h_{-4}$  echt parallel zur Ebene  $E$  verläuft.

Fertigen Sie ohne Verwendung eines Koordinatensystems eine aussagekräftige Skizze an, aus der die gegenseitige Lage von  $E$  sowie der beiden Geraden  $h_{-4}$  und  $g$  klar hervorgeht. Formulieren Sie die Lagebeziehung von  $h_{-4}$  und  $g$  zusätzlich in Worten.

41.0 Die Abbildung zeigt modellhaft einen Teil eines Klettergerüsts auf einem Spielplatz, das in einem kartesischen Koordinatensystem des  $\mathbb{R}^3$  beschrieben wird. Die Fußpunkte der Stützen des Klettergerüsts liegen in der  $x_1x_2$ -Ebene und dazu parallel die rechteckige Plattform  $P_1P_2P_3P_4$ . Über ein dreieckiges Netz, das an den Punkten  $N_1$ ,  $N_2$  und  $N_3$  fixiert ist, können die Kinder auf die Plattform  $P_1P_2P_3P_4$  klettern. Folgende Punkte sind gegeben:  $P_1(1,8|1,2|1,5)$ ,  $P_2(0|1,2|1,5)$ ,  $P_3(0|0|1,5)$  und  $N_3(0,9|3,6|0)$ . Die Koordinaten der Punkte sind Längenangaben in der Einheit Meter. Auf die Mitführung der Einheiten kann verzichtet werden. Runden Sie Ihre Ergebnisse sinnvoll. (Abitur 2022 GI)



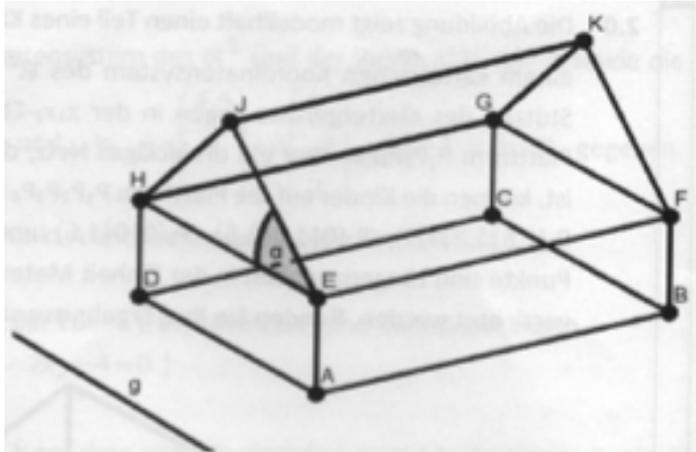
41.1 Geben Sie die Koordinaten des Punktes  $P_4$  an.

41.2 Das Netz ist in den Punkten  $N_1$  und  $N_2$  befestigt, die jeweils 10 cm senkrecht unter den Punkten  $P_1$  und  $P_2$  liegen. Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts des Netzes.

41.3 Bestimmen Sie den Winkel zwischen dem Netz und der  $x_1x_2$ -Ebene.

42.0 Eine Architektin plant den Bau eines einstöckigen Hauses. Dazu stellt sie das Haus modellhaft in einem kartesischen Koordinatensystem des  $\mathbb{R}^3$  dar. Im Modell wird das Haus aus einem Quader und einem dreiseitigen, geraden Prisma zusammengesetzt. Gegeben sind die Punkte  $A(2|2|0)$ ,  $B(10|10|0)$ ,  $C(4|16|0)$  und  $J(-1|5|7)$ .

Die Koordinaten der Punkte sind Längenangaben in der Einheit Meter. Die Deckenhöhe im Erdgeschoss beträgt 3 m. Bei den Rechnungen kann auf das Mitführen der Einheiten verzichtet werden. Runden Sie Ihre Ergebnisse sinnvoll. (Abitur 2022 GII)



42.1 Zeigen Sie, dass der Punkt D die Koordinaten  $(-4|8|0)$  besitzt. Überprüfen Sie rechnerisch, ob die Grundfläche ABCD des geplanten Hauses in B rechtwinklig ist.

42.2 Eine Grundstücksgrenze des Baugrundstückes verläuft entlang der Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mit } s \in \mathbb{R}. \text{ Die Punkte A und D liegen auf der Geraden h.}$$

Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Geraden g und h.

42.3 Ermitteln Sie die Maßzahl des Gesamtvolumens des Hauses.

42.4 Für den Dachneigungswinkel  $\alpha$  (siehe Abbildung) gilt gemäß der örtlichen Bauvorschrift  $30^\circ \leq \alpha \leq 45^\circ$ . Zeigen Sie, dass der Dachneigungswinkel die Bauvorschrift erfüllt.

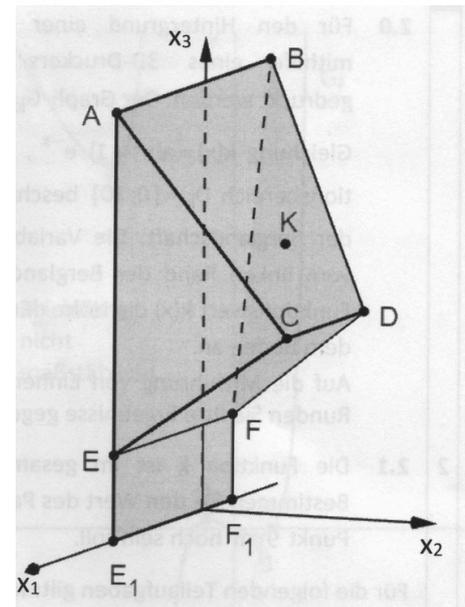
42.5 Im Dachgeschoss soll eine Zwischendecke eingezogen werden, die parallel zur Grundfläche und einen Meter tiefer als der First JK ist. Diese Zwischendecke liegt in der Ebene Z. Bestimmen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden der Ebene Z mit der durch EFKJ gegebenen Ebene.

42.6 Zur Bewässerung des Gartens soll Regenwasser, das auf das Hausdach trifft, in einer Zisterne gesammelt werden. Gemäß statistischer Daten der letzten Jahrzehnte ist die durchschnittliche gesamte Niederschlagsmenge im sonnenreichen Juli  $101 \frac{l}{m^2}$ .

Zur Bewässerung des  $113 \text{ m}^2$  großen Gartens sind zusätzlich täglich  $2,5 \frac{l}{m^2}$  notwendig.

Entscheiden Sie mithilfe einer Rechnung, ob die Bewässerung im Monat Juli gemäß der statistischen Daten durchgeführt werden kann. Vereinfachend wird von störenden Einflüssen wie etwa Wind abgesehen und angenommen, dass der Regen parallel zur  $x_3$ -Achse fällt.

43.0 In einer Kletterhalle für Kinder soll eine Wand mit Überhang gebaut werden, welche modellhaft in einem geeignet gewählten Koordinatensystem des  $\mathbb{R}^3$  betrachtet wird. Der Boden der Kletterhalle liegt in der  $x_1$ - $x_2$ -Koordinatenebene. Die Ebene  $G$ , die den Überhang bildet, ist durch die Punkte  $E(15|0|5)$ ,  $C(12|9|12)$  und  $D(-1|9|12)$  festgelegt. Zudem sind die Punkte  $A(15|0|25)$ ,  $B(-11|0|25)$  und  $F(-2|0|5)$  gegeben. Die Koordinaten der Punkte sind Längenangaben in der Einheit Dezimeter. Auf die Mitführung von Einheiten während der Rechnung kann verzichtet werden. Ergebnisse sind gegebenenfalls auf eine Nachkommastelle zu runden. (Abitur 2023 GI)



43.1 Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene  $G$  in Koordinatenform und beschreiben Sie die besondere Lage von  $G$  im Koordinatensystem. (mögliches Teilergebnis:  $G: 7x_2 - 9x_3 + 45 = 0$ )

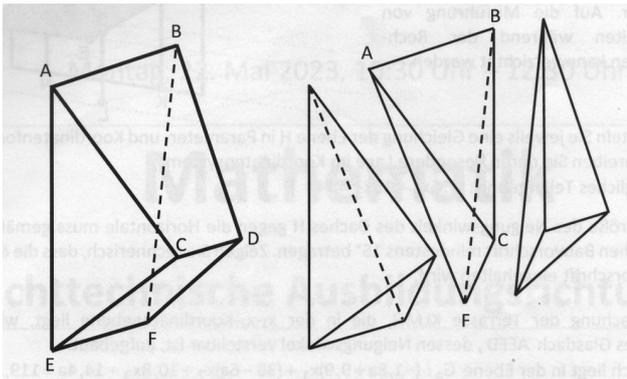
43.2 Berechnen Sie den Neigungswinkel der Ebene  $G$  zum Boden.

43.3 Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts des Dreieckigen Seitenteils  $AEC$ .

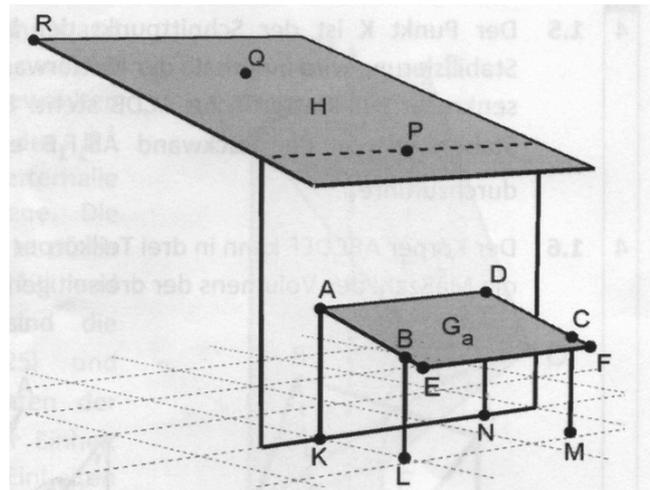
43.4 Die Decke der Halle, an der eine Überwachungskamera angebracht werden soll, liegt in der Ebene  $H: x_3 - 26 = 0$ . Um alle Bereiche der Kletterwand zu erfassen, muss die Kamera weit genug von der Rückwand  $AE_1F_1B$  entfernt sein. Bestimmen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden  $s$  der Ebene  $G$  und der Ebene  $H$ . Der Abstand dieser Schnittgeraden  $s$  zur  $x_1$ - $x_3$ -Koordinatenebene entspricht dem Mindestabstand der Kamera von der Rückwand  $AE_1F_1B$  in Dezimeter. Geben Sie diesen Abstand an.

43.5 Der Punkt K ist der Schnittpunkt der beiden Diagonalen des Vierecks ACDB. Zur Stabilisierung wird innerhalb der Kletterwand ein Stahlträger am Punkt K angebracht, der senkrecht zur Kletterfläche ACDB steht. Beschreiben Sie, wie der Montagepunkt des Stahlträgers an der Rückwand  $AE_1F_1B$  ermittelt werden kann, ohne die Rechnung durchzuführen.

43.6 Der Körper ABCDEF kann in drei Teilkörper zerlegt werden (siehe Skizze). Berechnen Sie die Maßzahl des Volumens der dreiseitigen Pyramide ABCF.



44.0 Das Dach eines Hauses liegt in einer Ebene H. In einem kartesischen Koordinatensystem des  $\mathbb{R}^3$  ist die Ebene H durch die drei Punkte  $P(5|0|8)$ ,  $Q(5|-7,2|10)$  und  $R(10|-10,8|11)$  festgelegt. Die Koordinaten der Punkte sind Längenangaben in der Einheit Meter. Auf die Mitführung von Einheiten während der Rechnungen kann verzichtet werden. (Abitur 2023 GII)



44.1 Ermitteln Sie jeweils eine Gleichung der Ebene H in Parameter- und Koordinatenform und beschreiben Sie deren besondere Lage im Koordinatensystem. (mögliches Teilergebnis:  $H: 5x_2 + 18x_3 = 144$ )

44.2 Die Größe des Neigungswinkels des Daches H gegen die Horizontale muss gemäß einer örtlichen Bauvorschrift mindestens  $15^\circ$  betragen. Zeigen Sie rechnerisch, dass die örtliche Bauvorschrift eingehalten wird.

Zur Überdachung der Terrasse KLMN, die in der  $x_1x_2$ -Koordinatenebene liegt, wird ein rechteckiges Glasdach AEFD, dessen Neigungswinkel verstellbar ist, aufgebaut.

Das Glasdach liegt in der Ebene  $G_a : (-1,8a+9,9)x_1 + (36-6a)x_2 + 10,8x_3 + 14,4a = 119,16$  mit dem Parameter  $a \in \mathbb{R}$ .

44.3 Die Ebenen H und  $G_a$  sollen parallel zueinander liegen. Ermitteln Sie hieraus den Wert des zugehörigen Parameters a.  
(Ergebnis:  $a = 5,5$ )

44.4 Zeigen Sie, dass die Punkte  $A(8|0|3,7)$  und  $B(8|3,42|2,75)$  in der Ebene  $G_{5,5}$  liegen.

Für die folgenden Teilaufgaben gilt:  $D(2|0|3,7)$  und  $K(8|0|0)$ .

44.5 Das Glasdach AEFD ist festgelegt durch die Punkte A, E und D.

Aus statischen Gründen darf die Glasüberdachung nur um maximal 20 % der Länge von  $\overline{AB}$  über den Punkt B hinausragen. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes E, wenn die maximal zulässige Länge vollständig ausgenutzt wird.

Hinweis:  $|\overline{AE}| = 1,2 \cdot |\overline{AB}|$

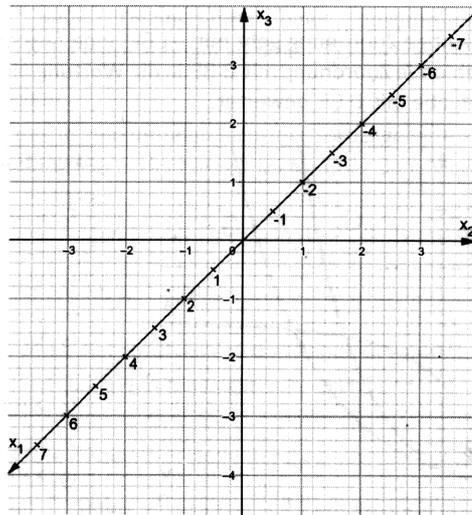
44.6 Als Windschutz sollen die drei Seitenflächen AKLB, BLMC und DNMC verglast werden. Der umbaute Raum besitzt die Form eines geraden trapezförmigen Prismas. Geben Sie die Koordinaten des Punktes L an. Berechnen Sie die Materialkosten für die drei Seitenflächen, wenn der Preis 200 € pro  $1 \text{ m}^2$  beträgt.

45.0 In einem kartesischen Koordinatensystem des  $\mathbb{R}^3$  sind die Ebene  $E: x_1 + 2x_2 - x_3 = 4$

und die Geradenschar  $g_k: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -k-2 \\ k \end{pmatrix}$  mit  $r, k \in \mathbb{R}$  gegeben.

(Abitur 2024 Teil 1)

45.1 Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Ebene  $E$  mit den Koordinatenachsen und veranschaulichen Sie die Lage der Ebene  $E$  in dem nachfolgend abgebildeten Koordinatensystem.



45.2 Überprüfen Sie, ob ein Wert für  $k$  existiert, so dass die Gerade  $g_k$  die Ebene  $E$  senkrecht schneidet.

45.3 Die Ebene  $F$  beinhaltet die  $x_3$ -Achse und steht senkrecht auf der Ebene  $E$ . Geben Sie eine Gleichung der Ebene  $F$  in Parameterform an.

46.0 Für die Bühnenbeleuchtung einer Theateraufführung an einer Beruflichen Oberschule wird ein Scheinwerfer (siehe Bild 1) installiert. Die Position des Scheinwerfers und der von ihm ausgeleuchtete Raum auf der Bühne wird modellhaft in einem kartesischen Koordinatensystem des  $\mathbb{R}^3$  beschrieben. Die  $x_1 - x_2$  -Ebene des Koordinatensystems wird durch den Bühnenboden festgelegt. Die rechteckige Glasfläche des Scheinwerfers hat die Ecken  $A(2|0|31), B(-1|2|30), C(-2|0|29)$  und  $D(1|-2|30)$ .

Bild 1

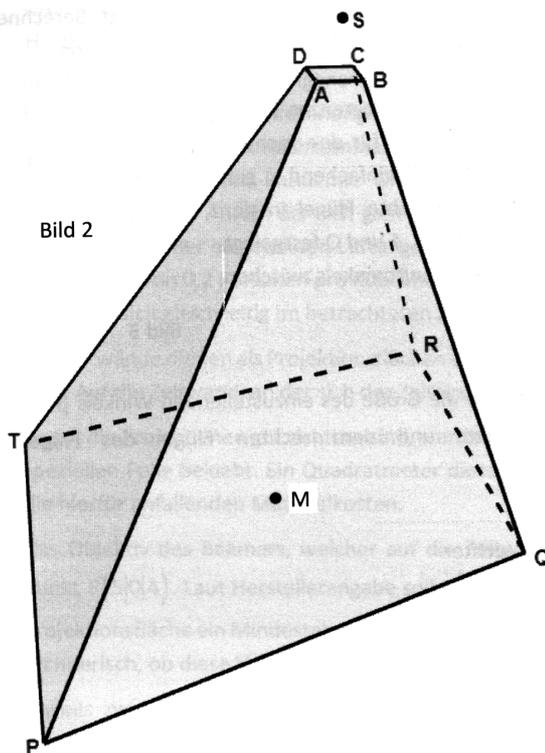
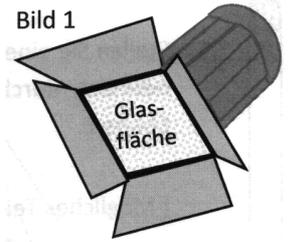


Bild 2

Die Vollausleuchtung mit dem Scheinwerfer ohne Berücksichtigung des Halbschattens kann in guter Näherung durch den Körper PQRTABCD (siehe Bild 2) beschrieben werden. Die Punkte  $P\left(\frac{130}{3} \mid \frac{31}{3} \mid 0\right), Q(6,5 \mid 24,5 \mid 0), R(-2 \mid 5,8 \mid 0)$  und  $T(23,5 \mid -9,5 \mid 0)$  sind die Eckpunkte der ausgeleuchteten Fläche PQRT auf dem Bühnenboden. Die Koordinaten sind Längenangaben in der Einheit Dezimeter (dm). Auf die Mitführung von Einheiten während der Rechnungen kann verzichtet werden. Die Ergebnisse sind sinnvoll zu runden. (Abitur 2024 GI)

46.1 Die Gerade  $g_{QB}$  verläuft durch die Punkte Q und B. Die Gerade  $g_{RC}$  verläuft durch die Punkte R und C. Die Geraden  $g_{QB}$  und  $g_{RC}$  schneiden sich im Punkt S.

Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes S. (Ergebnis:  $S(-2 \mid -1 \mid 34)$ )

46.2 Stellen Sie die Gleichung der Lotgeraden l zur Ebene E, in der sich die Glasfläche ABCD befindet, durch den Punkt S auf und bestimmen Sie den Abstand des Punktes S zur Ebene E.

(Mögliches Teilergebnis:  $l: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 30 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$ )

46.3 Die Diagonalen des Vierecks PQRT schneiden sich im Punkt  $M(15 \mid 7,5 \mid 0)$  (Nachweis nicht erforderlich). Zeigen Sie, dass der Punkt M auf der Geraden l liegt. Berechnen Sie die Größe des Schnittwinkels der Geraden l mit der  $x_1 - x_2$  -Koordinatenebene.

46.4 Der Scheinwerfer besitzt einen Flügelbegrenzer (siehe Bild 3). Der einzustellende Winkel soll für den rechten Flügel berechnet werden. Vereinfachend soll angenommen werden, dass der rechte Flügel in der Ebene F liegt, die durch die Punkte B, A und Q festgelegt ist. Berechnen Sie die Größe des Schnittwinkels zwischen der Ebene E und der Ebene F.

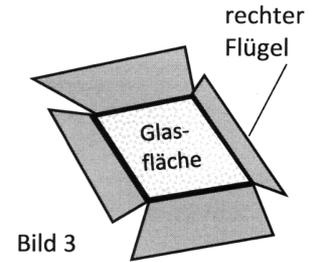


Bild 3

Schließen Sie anschließend auf die Größe des einzustellenden Winkels  $\beta$  zwischen der Glasfläche des Scheinwerfers und dem rechten Flügel des Flügelbegrenzers (siehe Bild 4).

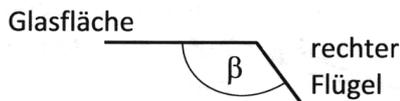
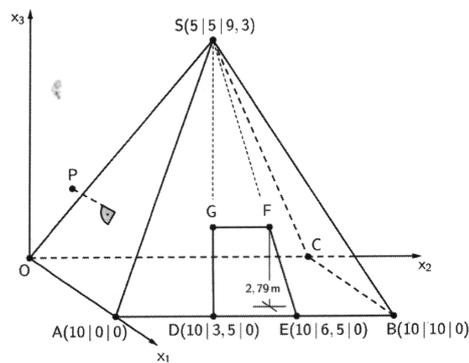


Bild 4

47.0 Für einen Stand auf der nächsten Reismesse in München plant ein Veranstalter ein Zelt, das in einem kartesischen Koordinatensystem des  $\mathbb{R}^3$  (vgl. Abbildung) modellhaft durch eine Pyramide OABCS mit quadratischer Grundfläche dargestellt wird. Die Zeltwand OAS liegt in der Ebene  $H: -93x_2 + 50x_3 = 0$ . Die Koordinaten



der Punkte sind Längenangaben in der Einheit Meter. Auf die Mitführung von Einheiten kann bei den Rechnungen verzichtet werden. Runden Sie Ihre Ergebnisse gegebenenfalls auf zwei Nachkommastellen. (Abitur 2024 GII)

47.1 Auch nach der Corona-Pandemie wird in den Zelten auf der Reismesse auf eine Beschränkung der Anzahl der sich gleichzeitig im Zelt aufhaltenden Personen geachtet. Die Kenndaten der eingebauten Lüftungsanlage geben für das hier betrachtete Zelt eine Obergrenze von 0,2 Personen pro Kubikmeter Raumvolumen vor. Ermitteln Sie, wie viele Personen sich gleichzeitig im betrachteten Zelt aufhalten dürfen.

47.2.0 Die Zeltwände dienen als Projektionsfläche für Beamer, die außerhalb des Zelts montiert sind. Auf die Zeltwand, an der sich der Zelteingang befindet, wird nicht projiziert.

47.2.1 Damit die Projektionen gut sichtbar sind, werden die drei Zeltwände vollständig mit einer speziellen Folie beklebt. Ein Quadratmeter dieser Folie kostet 15,30 Euro. Ermitteln Sie die hierfür anfallenden Materialkosten.

47.2.2 Das Objektiv des Beamers, welcher auf der Zeltwand OAS projiziert, befindet sich im Punkt  $P(5|0|4)$ . Laut Herstellerangaben soll zwischen dem Objektiv des Beamers und der Projektionsfläche ein Mindestabstand von 1,8 Meter eingehalten werden. Überprüfen Sie rechnerisch, ob diese Vorgabe hier erfüllt ist.

47.3 Jeweils zwei benachbarte Zeltwände schließen im Inneren des Zelts einen stumpfen Winkel ein. Ermitteln Sie die Größe dieses Winkels.

47.4 Der Zelteingang DEFG hat eine Durchgangshöhe von 2,79 m. Der Punkt G liegt auf der Strecke  $\overline{DS}$  und der Punkt  $F(8,5|6,05|2,79)$  auf der Strecke  $\overline{ES}$ . Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes G und zeigen Sie mit ihrem Ergebnis, dass das Viereck DEFG ein gleichschenkliges Trapez ist.  
(Teilergebnis:  $G(8,5|3,95|2,79)$ )

## Lösungen

1.1 Aus dem Normalenvektor der Ebene E und dem Richtungsvektor der Geraden g folgt, dass sich E und g in einem Punkt schneiden.

Den Schnittpunkt erhält man durch Einsetzen der Koordinatengleichungen der Gerade g in die Ebene E und berechnen des Parameters k  $\Rightarrow S(6/-3/1)$

1.2 Die Gerade g liegt in der Ebene E.

1.3 Die Gerade und die Ebene E schneiden sich  $\Rightarrow S(3/8/7)$

1.4 Verwandeln der Ebene E in Normalenform;  $\vec{n} = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ -24 \end{pmatrix}$

Die Gerade g und die Ebene E schneiden sich  $\Rightarrow S(8/7/-11)$

2. Bestimme die Geradengleichung g(A,B):  $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

Schnittpunkt zwischen der Geraden g und der Ebene ergibt sich dann als  $S(0/1/2)$ .

3.1 Die Normalenvektoren sind linear abhängig, also sind die Ebenen entweder echt parallel oder identisch.

Prüfe dazu, ob ein Punkt der Ebene  $E_1$  in der Ebene  $E_2$  liegt.

Es folgt dann, dass die Ebenen  $E_1$  und  $E_2$  identisch sind.

3.2 Die Ebenen  $E_1$  und  $E_2$  schneiden einander.

$$\text{Schnittgerade g: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k' \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

3.3 Schnittgerade g:  $\vec{x} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \\ -5 \end{pmatrix}$

3.4 Die Ebenen  $E_1$  und  $E_2$  schneiden einander.

$$\text{Schnittgerade g: } \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{5}{9} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{11}{9} \\ -\frac{8}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

3.5 Die Ebenen  $E_1$  und  $E_2$  sind echt parallel zueinander.

$$4. \sin\phi = \frac{1}{2} \Rightarrow \phi = 30^\circ$$

$$5. \cos\phi = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \phi = 45^\circ$$

$$6.1 \ A(35/0/0) \ C(0/35/0) \ S(17,5/17,5/22)$$

6.2

$$\vec{E}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 35 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 35 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -17,5 \\ 17,5 \\ 22 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 0 \\ 35 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -17,5 \\ 17,5 \\ 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 0 \\ 17,5 \end{pmatrix}$$

$$E: \begin{pmatrix} 22 \\ 0 \\ 17,5 \end{pmatrix} \circ \left[ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 35 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0 \Rightarrow E: 22x_1 + 17,5x_3 - 770 = 0$$

6.3

Grundfläche G:  $x_3 = 0$

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_E \circ \vec{n}_G|}{|\vec{n}_E| \cdot |\vec{n}_G|} = \frac{17,5}{\sqrt{790,25}} \approx 0,6225 \Rightarrow \alpha \approx 51,50^\circ$$

$$6.4 \ A_{\text{Seitenfläche}} = \frac{1}{2} \cdot |\vec{AB} \times \vec{AS}| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 770 \\ 0 \\ 612,5 \end{pmatrix} \right| \approx 491,95 \text{ m}^2$$

6.5

$$\vec{s} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{s}) = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 87,5 \\ 52,5 \\ 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{176}{6} \\ \frac{35}{2} \\ \frac{22}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow M\left(\frac{175}{6} / \frac{35}{2} / \frac{22}{3}\right)$$

Hilfsgerade h, die senkrecht auf der Seitenfläche ABS steht und durch M geht:

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{176}{6} \\ 6 \\ \frac{35}{2} \\ 2 \\ \frac{22}{3} \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 22 \\ 0 \\ 17,5 \end{pmatrix}$$

Hilfsebene H, die senkrecht auf  $x_1$ -Achse steht und S enthält:

$$H: \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \left[ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 17,5 \\ 17,5 \\ 22 \end{pmatrix} \right] = 0 \Rightarrow H: x_1 - 17,5 = 0$$

$$h \cap H = \{P\}$$

$$\frac{175}{6} + 22\lambda - 17,5 = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{35}{66} \Rightarrow \vec{p} = \begin{pmatrix} \frac{176}{6} \\ 6 \\ \frac{35}{2} \\ 2 \\ \frac{22}{3} \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{35}{66} \cdot \begin{pmatrix} 22 \\ 0 \\ 17,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17,5 \\ 17,5 \\ -1\frac{125}{132} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow P$  liegt unterhalb der offenen Grundfläche OABC, weil  $p_3 < 0$  ist.

6.6

$$\text{Sonnenstrahl: } s: \vec{x} = \begin{pmatrix} 40 \\ 30 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2,5 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$s \cap E = \{F_s\}$$

$$\Rightarrow 22 \cdot (40 - 2,5t) + 17,5 \cdot (8 - 2t) - 770 = 0$$

$$\Rightarrow 880 - 55t + 140 - 35t - 770 = 0 \Rightarrow t = \frac{25}{9}$$

$$\Rightarrow \vec{f}_s = \begin{pmatrix} 40 \\ 30 \\ 8 \end{pmatrix} + \frac{25}{9} \cdot \begin{pmatrix} -2,5 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{595}{18} \\ \frac{65}{3} \\ \frac{22}{9} \end{pmatrix} \Rightarrow F_s \left( \frac{595}{18} / \frac{65}{3} / \frac{22}{9} \right)$$

7.1

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + s' \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Untersuchung der gegenseitigen Lage der Geraden g und h:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} k = -2 \\ k = -2 \\ k = -4 \end{matrix} \Rightarrow g \text{ und } h \text{ nicht parallel}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + s' \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{(I)} \quad 1 - 1s' = k$$

$$\text{(II)} \quad s' = -k$$

$$\text{(III)} \quad -2 + 2s' = -2 - k$$

$$\Rightarrow 1 + k = k \Rightarrow 1 = 0$$

$\Rightarrow$  die Geraden g und h sind windschief zueinander

7.2

Aufstellen eines Verbindungsvektors von g zu h:

$$\begin{aligned}
 \vec{X}_g \vec{X}_h &= \begin{pmatrix} k-1+2s \\ -k-2s \\ -2-k+2-4s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k-1+2s \\ -k-2s \\ -k-4s \end{pmatrix} \\
 &\Rightarrow \begin{pmatrix} k-1+2s \\ -k-2s \\ -k-4s \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 0 \\
 &\Rightarrow -2k+2-4s-2k-4s-4k-16s=0 \Rightarrow -8k-24s+2=0 \\
 &\Rightarrow \begin{pmatrix} k-1+2s \\ -k-2s \\ -k-4s \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \\
 &\Rightarrow k-1+2s+k+2s+k+4s=0 \Rightarrow 3k+8s-1=0 \\
 &\Rightarrow \text{(I) } -8k-24s+2=0 \\
 &\quad \text{(II) } 3k+8s-1=0 \\
 &\Rightarrow k=1 \quad s=-\frac{1}{4} \\
 &\Rightarrow \vec{X}_g \vec{X}_h = \begin{pmatrix} -0,5 \\ -0,5 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{i} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -0,5 \\ -0,5 \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

7.3

$$\begin{aligned}
 \vec{AB} &= \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{AC}_k = \begin{pmatrix} k-1 \\ -k \\ -k \end{pmatrix} \\
 \vec{n}_{E_k} &= \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} k-1 \\ -k \\ -k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2k \\ 2k-4 \\ 2 \end{pmatrix} \\
 E_k : &\begin{pmatrix} 2k \\ 2k-4 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \left[ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right] = 0 \\
 &\Rightarrow E_k : 2kx_1 + (2k-4)x_2 + 2x_3 - 2k + 4 = 0 \\
 &\Rightarrow E_k : kx_1 + (k-2)x_2 + x_3 - k + 2 = 0
 \end{aligned}$$

7.4

Der Punkt S liegt einerseits auf der Geraden AB

( $E_k$  Ebenenbündel mit gemeinsamer Gerade AB) und andererseits auf der Ebene H

$$\Rightarrow \{S\} = AB \cap H \Rightarrow \{S\} = g \cap H$$

$$\Rightarrow 1 - 2s - 2s + 4 - 8s + 19 = 0$$

$$\Rightarrow -12s = -24 \Rightarrow s = 2$$

$$\Rightarrow \vec{x}_S = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow S(-3/4/6)$$

8.1

$$F: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_F = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$F: \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow F: x_1 + x_2 - x_3 - 1 = 0$$

8.2

$$V_{\text{Tetraeder}} = \frac{1}{6} \cdot \left| \vec{PR} \cdot (\vec{PQ} \times \vec{PS}) \right|$$

$$\vec{PR} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{PR} \cdot (\vec{PQ} \times \vec{PS}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -1 - 1 = -2$$

$$\Rightarrow V_{\text{Tetraeder}} = \frac{1}{6} \cdot |-2| = \frac{1}{3} \text{ VE}$$

8.3

Hilfsgerade h auflösen, die durch R geht und senkrecht auf F steht:

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$h \cap F = \{T\}: h \text{ in } F \text{ einsetzen: } t + t - (1 - t) - 1 = 0 \Rightarrow 3t - 2 = 0 \Rightarrow t = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \vec{t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow T\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$$

8.4

$$\vec{TC} = \frac{1}{4} \cdot \vec{TR}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow C\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

8.5

$$\cos \varphi = \frac{\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{CS}}{|\overrightarrow{CP}| \cdot |\overrightarrow{CS}|}$$

$$\overrightarrow{CP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow |\overrightarrow{CP}| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{0,75}$$

$$\overrightarrow{CS} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow |\overrightarrow{CS}| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{0,75}$$

$$\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{CS} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \cos \varphi = \frac{-0,25}{\sqrt{0,75} \cdot \sqrt{0,75}} = \frac{-0,25}{0,75} = -\frac{1}{3} \Rightarrow \varphi \approx 109,47^\circ$$

9.1

$$E_0 : x_1 + 2x_3 = 0$$

Die Ebene  $E_0$  ist eine Ursprungsebene, die die  $x_2$  – Achse enthält.

9.2

$$g \text{ in } E_a : (1+a) \cdot (1-\lambda) + a \cdot \lambda - (a-2) \cdot (-1+\lambda) - a = 0$$

$$\Rightarrow 1+a-\lambda-a \cdot \lambda + a \cdot \lambda + a-a \cdot \lambda - 2+2\lambda-a=0$$

$$\Rightarrow -a \cdot \lambda + \lambda + a - 1 = 0 \Rightarrow (-a+1) \cdot \lambda + (a-1) = 0$$

$$\Rightarrow a=1: g \subset E_1 \quad a \neq 1: g \text{ schneidet } E_a$$

9.3

$$P \text{ in } g: \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} 2 = 1 - \lambda \\ -2 = \lambda \\ -1 = -1 + \lambda \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \lambda = -1 \\ \lambda = -2 \\ \lambda = 0 \end{array} \Rightarrow P \notin g$$

$$\begin{aligned}
 P \text{ in } E_a: (1+a) \cdot 2 + a \cdot (-2) - (a-2) \cdot (-1) - a &= 0 \\
 2 + 2a - 2a + a - 2 - a &= 0 \Rightarrow 0 = 0 (w) \Rightarrow P \in E_a
 \end{aligned}$$

9.4

$$F: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mit } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$P \in E_a$  und  $P \in F \Rightarrow E_a$  und  $F$  nicht echt parallel, da  $P \notin g$

$a = 1: g \subset E_1$  und  $g \subset F \Rightarrow E_1$  und  $F$  identisch

$a \neq 1: E_a$  und  $F$  schneiden sich in einer Geraden

10.1

$P(2/0/0), R(0/2/0), Q(2/2/0), A(2/0,5/0), B(2/1,5/0), S(1/1/2)$

$$\vec{c} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{b} + \vec{s}) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2,5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 1,25 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow C(1,5/1,25/1)$$

$$\vec{d} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{a} + \vec{s}) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1,5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 0,75 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow D(1,5/0,75/1)$$

$$\begin{aligned}
 A_{\triangle ABD} &= \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -0,5 \\ 0,25 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0,5 \end{pmatrix} \right| = \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1+0+0,25} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1,25}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_{\triangle BCD} &= \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD}| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} -0,5 \\ -0,25 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -0,5 \\ -0,75 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0 \\ 0,25 \end{pmatrix} \right| = \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{0,25+0+0,0625} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{0,3125}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A_{\text{Trapez } ABCD} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1,25} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{0,3125} = \frac{3}{8} \cdot \sqrt{5} \approx 0,84 (\text{m}^2)$$

10.2

$L(1/1/1,75)$

Gerade LD aufstellen:  $\vec{g}_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1,75 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0,5 \\ -0,25 \\ -0,75 \end{pmatrix} \quad s \in \mathbb{R}$

$\vec{g}_1 \cap x_1 - x_2 - \text{Ebene} = \{D'\}$

$x_1 - x_2 - \text{Ebene} : x_3 = 0$

$\Rightarrow 1,75 - 0,75s = 0 \Rightarrow s = 2\frac{1}{3}$

$\Rightarrow \vec{d}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1,75 \end{pmatrix} + 2\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 0,5 \\ -0,25 \\ -0,75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\frac{1}{6} \\ \frac{5}{12} \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow D' \left( 2\frac{1}{6} / \frac{5}{12} / 0 \right)$

Gerade LC aufstellen:  $\vec{g}_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1,75 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,25 \\ -0,75 \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R}$

$\vec{g}_2 \cap x_1 - x_2 - \text{Ebene} = \{C'\}$

$\Rightarrow 1,75 - 0,75t = 0 \Rightarrow t = 2\frac{1}{3}$

$\Rightarrow \vec{c}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1,75 \end{pmatrix} + 2\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,25 \\ -0,75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\frac{1}{6} \\ \frac{19}{12} \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow C' \left( 2\frac{1}{6} / \frac{19}{12} / 0 \right)$

11.1

$F : \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + m \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{n}_F = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow F : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 - 2 \\ x_2 \\ x_3 + 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow F : x_1 + x_2 + 2x_3 - 4 = 0$

11.2

$E_a$  in F einsetzen:

$$(2 - \lambda + \mu \cdot a) + (1 + \mu \cdot a) + 2(1 + \mu \cdot a + \mu) - 4 = 0$$

$$\Rightarrow 4\mu \cdot a + 2\mu = 0 \Rightarrow (4a + 2)\mu = 0 \Rightarrow a = -0,5$$

11.3

$$S_1(4/0/0) \quad S_2(0/4/0)$$

$$V = \frac{1}{6} \cdot \left| (\overrightarrow{OS_1} \times \overrightarrow{OS_2}) \circ \overrightarrow{OP} \right|$$

$$\overrightarrow{OS_1} \times \overrightarrow{OS_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 16 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 16 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 16$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{6} \cdot 16 = \frac{8}{3}$$

11.4

$$\overrightarrow{n_{E_a}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ a \\ a+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+1 \\ a+1 \\ -2a \end{pmatrix}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{|\overrightarrow{n_{E_a}} \circ \overrightarrow{n_F}|}{|\overrightarrow{n_{E_a}}| \cdot |\overrightarrow{n_F}|}$$

$$\overrightarrow{n_{E_a}} \circ \overrightarrow{n_F} = \begin{pmatrix} a+1 \\ a+1 \\ -2a \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = a+1 + a+1 - 4a = 2 - 2a$$

$$|\overrightarrow{n_{E_a}}| = \sqrt{(a+1)^2 + (a+1)^2 + (-2a)^2} = \sqrt{6a^2 + 4a + 2}$$

$$|\overrightarrow{n_F}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|2 - 2a|}{\sqrt{6a^2 + 4a + 2} \cdot \sqrt{6}} \Rightarrow \sqrt{72a^2 + 48a + 24} = |4 - 4a|$$

$$\Rightarrow 72a^2 + 48a + 24 = 16 - 32a + 16a^2 \Rightarrow 56a^2 + 80a + 8 = 0$$

$$\Rightarrow 7a^2 + 10a + 1 = 0 \Rightarrow a_1 = \frac{-5 + 3\sqrt{2}}{7} \approx -0,11 \quad a_2 = \frac{-5 - 3\sqrt{2}}{7} \approx -1,32$$

11.5

$$E_a: \begin{pmatrix} a+1 \\ a+1 \\ -2a \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 - 2 \\ x_2 \\ x_3 - 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow E_a: (a+1)x_1 + (a+1)x_2 - 2ax_3 - 2 = 0$$

g in  $E_a$  einsetzen:

$$(a+1) \cdot (-1+v) + (a+1) \cdot (3-v) - 2a \cdot 1 - 2 = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

$\Rightarrow$  g liegt in  $E_a$  für alle  $a \in \mathbb{R}$

$$A(-1+v/3-v/1) \in g \Rightarrow \vec{OA} = \begin{pmatrix} -1+v \\ 3-v \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{OA} \circ \vec{r}_g = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1+v \\ 3-v \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow -1+v-3+v=0 \Rightarrow v=2$$

$\Rightarrow L(1/1/1)$

$$\Rightarrow d(0;g) = |\vec{OL}| = \sqrt{3}$$

12.1

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0,4 \end{pmatrix} \quad \vec{DC} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ -0,4 \end{pmatrix} \quad \vec{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0,4 \end{pmatrix} \quad \vec{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0,4 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow [\vec{AB}]$  und  $[\vec{DC}]$  parallel und gleich lang

$\Rightarrow [\vec{AD}]$  und  $[\vec{BC}]$  parallel und gleich lang

$\Rightarrow$  ABCD ist ein Parallelogramm

$$\vec{AB} \circ \vec{AD} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0,4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0,4 \end{pmatrix} = 0,16$$

$\Rightarrow$  AB und AD stehen nicht senkrecht aufeinander

$\Rightarrow$  ABCD kann kein Rechteck sein

$$A_{\text{Parallelogramm}} = |\vec{AB} \times \vec{AD}| = \left| \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0,4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0,4 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -3,2 \\ -3,2 \\ 64 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \sqrt{(-3,2)^2 + (-3,2)^2 + 64^2} = \sqrt{4116,48} \approx 64,2 \text{ m}^2$$

$$\text{Betrachte Punkte ABD: Volumen} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 \cdot 0,4 = 12,8 \text{ m}^3$$

$$\text{Betrachte Punkte BDC: Volumen} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 \cdot 0,4 = 12,8 \text{ m}^3$$

$$\Rightarrow \text{Volumen}_{\text{Erde}} = 12,8 \text{ m}^3 + 12,8 \text{ m}^3 = 25,6 \text{ m}^3$$

### 12.2

E verläuft echt parallel zur  $x_2$  – Achse

Drei Punkte der Ebene E bestimmen, z.B.:

$A(0/0/4), B(0/4/4), C(-4/0/1)$

$$\Rightarrow E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_F = \vec{UV} \times \vec{UW} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1,5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ -16 \end{pmatrix} \quad \vec{n}_F^* = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow F: \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 - 6 \\ x_2 - 1 \\ x_3 - 5,5 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow F: 3x_1 + 4x_3 - 40 = 0$$

### 12.3

$$x_1x_2\text{-Ebene: } x_3 = 0 \Rightarrow \vec{n}_H = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\cos \beta_E = \frac{|\vec{n}_E \circ \vec{n}_H|}{|\vec{n}_E| \cdot |\vec{n}_H|}$$

$$\vec{n}_E \circ \vec{n}_H = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 4 \quad |\vec{n}_E| = \sqrt{9+16} = 5 \quad |\vec{n}_H| = 1$$

$$\Rightarrow \cos \beta_E = \frac{4}{5} \Rightarrow \beta_E \approx 36,9^\circ$$

$$\cos \beta_F = \frac{|\vec{n}_F \circ \vec{n}_H|}{|\vec{n}_F| \cdot |\vec{n}_H|}$$

$$\vec{n}_F \circ \vec{n}_H = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \quad |\vec{n}_F| = \sqrt{2,25+4} = 2,5 \quad |\vec{n}_H| = 1$$

$$\Rightarrow \cos \beta_F = \frac{2}{2,5} \Rightarrow \beta_F \approx 36,9^\circ$$

$$\gamma_1 = 90^\circ - 36,9^\circ = 53,1^\circ = \gamma_2$$

$\Rightarrow$  die Dachflächen treffen sich in einem Winkel von  $106,2^\circ$ ;

### 12.4

Gerade durch  $R_1$  und  $R_2$  bestimmen (Schnittgerade von E und F):

$$(I) -3x_1 + 4x_3 = 16$$

$$(II) 1,5x_1 + 2x_3 = 20$$

$$2 \cdot (II) + (I): 8x_3 = 56 \Rightarrow x_3 = 7$$

$$(I) \Rightarrow -3x_1 + 28 = 16 \Rightarrow x_1 = 4 \quad x_2 \text{ beliebig}$$

$$\Rightarrow R_1(4/0/7) \quad R_2(4/8/7)$$

### 12.5

Hilfsgerade h durch P aufstellen, die senkrecht auf E steht.

Betrachtete Dachfläche muss nach Skizze Ebene E sein,

wegen z.B. Schnittpunkt mit der  $x_3$  – Achse.

$$\vec{h}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$h \cap E = \{L\} \quad h \text{ in E einsetzen}$$

$$-3 \cdot (-3s) + 4 \cdot (3 + 4s) = 16 \Rightarrow 25s = 0,4 \Rightarrow s = 0,16$$

$$\Rightarrow \vec{l} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + 0,16 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,48 \\ 4 \\ 3,64 \end{pmatrix} \Rightarrow L(-0,48/4/3,64)$$

Länge der Stütze:

$$|\vec{PL}| = \left| \begin{pmatrix} -0,48 \\ 0 \\ 0,64 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-0,48)^2 + 0,64^2} = \sqrt{0,64} = 0,8 \text{ m}$$

13.1

$$\left( \begin{array}{ccc|c} -4 & -1 & 1 & -18 \\ 2 & 1 & 0 & 12 \end{array} \right) \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} -4 & -1 & 1 & -18 \\ 0 & -2 & -2 & -12 \end{array} \right)$$

$x_3 = r$  beliebig

$$(II) \Rightarrow -2x_2 - 2x_3 = -12 \Rightarrow x_2 = 6 - r$$

$$(I) \Rightarrow -4x_1 - 6 + r + r = -18 \Rightarrow -4x_1 = -12 - 2r \Rightarrow x_1 = 3 + 0,5r$$

$$\Rightarrow \vec{s}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0,5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

13.2

s in  $G_k$  einsetzen:  $6 - \lambda + \lambda + k = 0 \Rightarrow k = -6$

$\Rightarrow$  für  $k \in \mathbb{R} \setminus \{-6\}$  haben die drei Ebenen keinen gemeinsamen Punkt

Alternative:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} -4 & -1 & 1 & -18 \\ 2 & 1 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & -k \end{array} \right) \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} -4 & -1 & 1 & -18 \\ 0 & -2 & -2 & -12 \\ 0 & 1 & 1 & -k \end{array} \right) \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} -4 & -1 & 1 & -18 \\ 0 & -2 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 2k+12 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow 2k+12 \neq 0 \Rightarrow k \neq -6$$

13.3

$$\vec{OP} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \vec{OQ} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{OS} = \begin{pmatrix} 3+4\mu \\ -3+\mu \\ 9-\mu \end{pmatrix}$$

$$\vec{OP} \times \vec{OQ} = \begin{pmatrix} -36 \\ 18 \\ 36 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -36 \\ 18 \\ 36 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3+4\mu \\ -3+\mu \\ 9-\mu \end{pmatrix} = -108 - 144\mu - 54 + 18\mu + 324 - 36\mu = 162 - 162\mu$$

$$\Rightarrow \frac{1}{6} \cdot |162 - 162\mu| = 27 \Rightarrow |162 - 162\mu| = 162$$

$$1) 162 - 162\mu = 162 \Rightarrow \mu = 0$$

$$2) 162 - 162\mu = -162 \Rightarrow \mu = 2$$

$$\Rightarrow S_1(3/-3/9) \quad S_2(11/-1/7)$$

14.1

$$\begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,8 \\ 0,2 \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{ll} \text{(I)} & 0,6 = 0,4a \\ \text{(II)} & 0,8 = 0,1a \\ \text{(III)} & 0,2 = 0 \text{ (f)} \end{array}$$

$\Rightarrow F_1$  und  $F_2$  schneiden sich oder sind windschief;

$$\begin{pmatrix} -5,6 \\ -5,8 \\ 1,8 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,8 \\ 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7,8 \\ 0,8 \\ 4,0 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{(I)} \quad -5,6 + 0,6t_1 = -7,8 + 0,4t_2$$

$$\text{(II)} \quad -5,8 + 0,8t_1 = 0,8 + 0,1t_2$$

$$\text{(III)} \quad 1,8 + 0,2t_1 = 4,0$$

$$\text{(III)} \Rightarrow 0,2t_1 = 2,2 \Rightarrow t_1 = 11$$

$$\text{(II)} \Rightarrow -5,8 + 0,8 \cdot 11 = 0,8 + 0,1t_2 \Rightarrow 0,1t_2 = 2,2 \Rightarrow t_2 = 22$$

$$t_1 \text{ und } t_2 \text{ in (I): } -5,6 + 0,6 \cdot 11 = -7,8 + 0,4 \cdot 22 \Rightarrow 1 = 1 \text{ (w)}$$

$\Rightarrow F_1$  und  $F_2$  schneiden sich in einem Punkt, aber da  $t_1$  und  $t_2$  unterschiedlich sind, wird es zu keiner Kollision kommen.

14.2

$$P_1(-5,6 + 0,6t / -5,8 + 0,8t / 1,8 + 0,2t) \in F_1$$

$$P_2(-7,8 + 0,4t / 0,8 + 0,1t / 4) \in F_2$$

$$\overline{P_1 P_2} = \begin{pmatrix} -2,2 - 0,2t \\ 6,6 - 0,7t \\ 2,2 - 0,2t \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} d(t) &= \sqrt{(-2,2 - 0,2t)^2 + (6,6 - 0,7t)^2 + (2,2 - 0,2t)^2} = \\ &= \sqrt{4,84 + 0,88t + 0,04t^2 + 43,56 - 9,24t + 0,49t^2 + 4,84 - 0,88t + 0,04t^2} = \\ &= \sqrt{0,57t^2 - 9,24t + 53,24} \end{aligned}$$

$$d(t)^2 = 0,57t^2 - 9,24t + 53,24$$

Absolutes Minimum ist der Scheitel, weil  $d(t)^2$  eine nach oben geöffnete Parabel ist;

$$\Rightarrow t_{\min} = -\frac{-9,24}{2 \cdot 0,57} \approx 8,1$$

15.1

$$X \Rightarrow 5x_1 = 4 \Rightarrow x_1 = 0,8 \Rightarrow X(0,8/0/0)$$

$$Y \Rightarrow 2x_2 = 4 \Rightarrow x_2 = 2 \Rightarrow Y(0/2/0)$$

$$Z \Rightarrow 2x_3 = 4 \Rightarrow x_3 = 2 \Rightarrow Z(0/0/2)$$

$$\vec{OX} = \begin{pmatrix} 0,8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{OY} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{Oz} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{OX} \times \vec{OY} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1,6 \end{pmatrix}$$

$$V = \frac{1}{6} \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1,6 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{6} \cdot 3,2 = \frac{8}{15}$$

15.2.1

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 2 & 4 \\ -15 & -2k-4 & 3k-9 & -12k-9 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & -10k+10 & 15k-15 & -60k+15 \end{array} \right)$$

$$-10k+10=0 \Rightarrow k=1 \quad 15k-15=0 \Rightarrow k=1$$

$\Rightarrow$  für alle  $k \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$  schneiden sich die Ebene E und  $H_k$  in einer Geraden

Alternative:

$$\vec{n}_E \times \vec{n}_{H_k} \neq 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -15 \\ -2k-4 \\ 3k-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10k-10 \\ -15k+15 \\ -10k+10 \end{pmatrix}$$

$$10k-10=0 \Rightarrow k=1$$

$$-15k+15=0 \Rightarrow k=1$$

$$-10k+10=0 \Rightarrow k=1$$

$$\Rightarrow k \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

15.2.2

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & -20 & 30 & -165 \end{array} \right)$$

$x_3 = r$  beliebig

$$(II) \Rightarrow -20x_2 + 30x_3 = -165 \Rightarrow x_2 = 8,25 + 1,5r$$

$$(I) \Rightarrow 5x_1 + 16,5 + 3r + 2r = 4 \Rightarrow x_1 = -2,5 - r$$

$$\Rightarrow \vec{s}: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2,5 \\ 8,25 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1,5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{n}_E \circ \vec{n}_H}{|\vec{n}_E| \cdot |\vec{n}_H|}$$

$$\vec{n}_E \circ \vec{n}_H = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -15 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} = -75 - 20 = -95$$

$$|\vec{n}_E| = \sqrt{25 + 4 + 4} = \sqrt{33} \quad |\vec{n}_H| = \sqrt{225 + 100} = \sqrt{325}$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{|-95|}{\sqrt{33} \cdot \sqrt{325}} \approx 0,91733 \Rightarrow \alpha \approx 23,5^\circ$$

15.2.3

$$-12k - 9 = 0 \Rightarrow k = -0,75$$

$$\lambda_1 \cdot \overrightarrow{AB}_{-0,75} + \lambda_2 \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO}$$

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} -1,75 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(I) -1,75\lambda_1 - 2\lambda_2 = -1$$

$$(II) -3\lambda_1 + 3\lambda_2 = -3$$

$$(III) 3\lambda_1 + 2\lambda_2 = 2$$

$$(II) + (III): 5\lambda_2 = -1 \Rightarrow \lambda_2 = -0,2$$

$$(III) \Rightarrow 3 \cdot \lambda_1 + 2 \cdot (-0,2) = 2 \Rightarrow 3\lambda_1 = 2,4 \Rightarrow \lambda_1 = 0,8$$

$$\lambda_1 \text{ und } \lambda_2 \text{ in (I): } -1,75 \cdot (0,8) - 2 \cdot (-0,2) = -1 \Rightarrow -1 = -1 \text{ (w)}$$

Ursprung kann nicht im Dreieck  $AB_{-0,75}C$  liegen, weil  $\lambda_2$  negativ ist.

16.1

$$\vec{F}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\vec{n}_F = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \vec{F}: \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 - 3 \\ x_2 + 1 \\ x_3 + 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow F: 2x_1 + 4x_3 - 2 = 0$$

16.2

hin  $E_a$  einsetzen:

$$2a(3+2\lambda) - (a-1)(-1-\lambda) + 2 = 0$$

$$6a + 4a\lambda - (-a - a\lambda + 1 + \lambda) + 2 = 0 \Rightarrow 7a + 5a\lambda - \lambda + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 5a\lambda - \lambda = -1 - 7a \Rightarrow \lambda(5a - 1) = -1 - 7a$$

$$\Rightarrow 5a - 1 = 0 \Rightarrow a = 0,2$$

$$a = 0,2: 0 = -2,4 \text{ (f)} \Rightarrow h \text{ echt parallel zu } E_{0,2}$$

$$a \in \mathbb{R} \setminus \{0,2\}: h \text{ und } E_a \text{ schneiden sich}$$

16.3

$$\vec{n}_{E_a} \circ \vec{n}_F = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2a \\ 0 \\ 1-a \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow 2a + 2 - 2a = 0 \Rightarrow 2 = 0 \text{ (f)}$$

$\Rightarrow$  die Ebenen  $E_a$  und  $F$  schneiden sich für kein  $a \in \mathbb{R}$  senkrecht

$$\begin{pmatrix} 2a \\ 0 \\ 1-a \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{(I)} \quad 2a = t$$

$$\text{(II)} \quad 0 = 0$$

$$\text{(III)} \quad 1 - a = 2t$$

$$t = 2a \text{ in (III): } 1 - a = 4a \Rightarrow a = 0,2$$

16.4

$$\vec{n}_{E_a} \circ \vec{n}_F = 2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2a \\ 0 \\ 1-a \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2$$

$$|\vec{n}_{E_a}| = \sqrt{4a^2 + 1 - 2a + a^2} = \sqrt{5a^2 - 2a + 1}$$

$$|\vec{n}_F| = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \cos 45^\circ = \frac{2}{\sqrt{5a^2 - 2a + 1} \cdot \sqrt{5}} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{\sqrt{5a^2 - 2a + 1} \cdot \sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{5a^2 - 2a + 1} \cdot \sqrt{5} = \frac{4}{\sqrt{2}} \Rightarrow (5a^2 - 2a + 1) \cdot 5 = 8$$

$$\Rightarrow 25a^2 - 10a - 3 = 0 \Rightarrow a_1 = 0,6 \quad a_2 = -0,2$$

17.1

$$\vec{g}_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 100 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

C(1002/350/250) (4 km unterhalb von B in  $x_3$ -Richtung)

Prüfen, ob C auf  $g_1$  liegt:

$$\begin{pmatrix} 1002 \\ 350 \\ 250 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 100 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(I)  $1002 = 2 + 4s \Rightarrow s = 250$

(II)  $350 = 100 + s \Rightarrow s = 250$

(III)  $250 = s$

$\Rightarrow C \in g_1 \Rightarrow B$  liegt genau 4 m oberhalb von  $g_1$  in  $x_3$ -Richtung

## 17.2

Berechnung des Abstandes von B zu  $g_1$  :

Hilfebene H durch B, die senkrecht auf  $g_1$  steht

$$H: \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 - 1002 \\ x_2 - 350 \\ x_3 - 254 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow H: 4x_1 + x_2 + x_3 - 4612 = 0$$

$g_1$  in H einsetzen:

$$4(2 + 4s) + 100 + s + s - 4612 = 0 \Rightarrow s = \frac{2252}{9}$$

$$\Rightarrow \vec{l} = \begin{pmatrix} 2 \\ 100 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2252}{9} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9026}{9} \\ \frac{3152}{9} \\ \frac{2252}{9} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow d(B; g_1) = |\overline{BL}| = \left| \begin{pmatrix} \frac{8}{9} \\ \frac{2}{9} \\ -\frac{34}{9} \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\left(\frac{8}{9}\right)^2 + \left(\frac{2}{9}\right)^2 + \left(-\frac{34}{9}\right)^2} = \sqrt{15\frac{1}{9}} \approx 3,89$$

$\Rightarrow 3,89 < 4$  und damit treffen die Tunnelröhren aufeinander

18.1

$$\vec{r}_{g_1} = \lambda \cdot \vec{r}_{g_2} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

(I)  $1 = \lambda$

(II)  $-2 = 5\lambda \Rightarrow \lambda = -0,4$

(III)  $1 = -3\lambda \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{3}$

$\Rightarrow \vec{r}_{g_1}$  und  $\vec{r}_{g_2}$  linear unabhängig und gleicher Aufpunkt

$\Rightarrow g_1$  und  $g_2$  spannen eine Ebene auf

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$E: \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 - 2 \\ x_2 - 2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow E: x_1 + 4x_2 + 7x_3 - 10 = 0$$

18.2

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 10 \\ 2 & 5 & 8 & 11 \end{array} \right) \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 10 \\ 0 & -3 & -6 & -9 \end{array} \right)$$

(II)  $\Rightarrow -3x_2 - 6x_3 = -9 \quad x_3 = \lambda$  beliebig

$\Rightarrow -3x_2 - 6\lambda = -9 \Rightarrow x_2 = 3 - 2\lambda$

(I)  $\Rightarrow x_1 + 4(3 - 2\lambda) + 7\lambda = 10 \Rightarrow x_1 = -2 + \lambda$

$$\Rightarrow s: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

18.3

$$\vec{n}_E \circ \vec{n}_F = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} = 2 + 20 + 56 = 78$$

$$|\vec{n}_E| = \sqrt{1+16+49} = \sqrt{66} \quad |\vec{n}_F| = \sqrt{4+25+64} = \sqrt{93}$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{78}{\sqrt{66} \cdot \sqrt{93}} \approx 0,9956 \Rightarrow \alpha \approx 5,4^\circ$$

18.4

Hilfsebene H durch  $(-2/3/0)$ , die senkrecht auf s steht:

$$H: \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 + 2 \\ x_2 - 3 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow x_1 - 2x_2 + x_3 + 8 = 0$$

$g_1$  in H einsetzen:

$$2 + \lambda - 2(2 - 2\lambda) + \lambda + 8 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$$

$$\Rightarrow \vec{l} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow d(s; g_1) = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{9+1+1} = \sqrt{11}$$

18.5

$$\vec{n}_F = \lambda \cdot \vec{n}_{H_a} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} a \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

(I)  $2 = a\lambda$

(II)  $5 = 6\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{5}{6}$

(III)  $8 = 9\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{8}{9}$

$\Rightarrow \vec{n}_F$  und  $\vec{n}_{H_a}$  für alle  $a \in \mathbb{R}$  linear unabhängig

$\Rightarrow H_a$  und F für alle  $a \in \mathbb{R}$  nicht parallel

18.6

Hilfsgerade  $h$  aufstellen, die durch  $O$  geht und senkrecht auf  $H_a$  steht:

$$h: \vec{x} = k \cdot \begin{pmatrix} a \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$h$  in  $H_a$  einsetzen:

$$a \cdot a \cdot k + 6 \cdot 6k + 9 \cdot 9k = 12 \Rightarrow a^2k + 117k = 12 \Rightarrow k = \frac{12}{a^2 + 117}$$

$$\Rightarrow \vec{l} = \frac{12}{a^2 + 117} \cdot \begin{pmatrix} a \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow d(O; H_a) = |\overline{OL}| = \left| \frac{12}{a^2 + 117} \cdot \begin{pmatrix} a \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} \right| = \frac{12}{a^2 + 117} \cdot \sqrt{a^2 + 117} = \frac{12}{\sqrt{a^2 + 117}}$$

$$\Rightarrow \frac{12}{\sqrt{a^2 + 117}} = \frac{12}{11} \Rightarrow \sqrt{a^2 + 117} = 11 \Rightarrow a^2 + 117 = 121$$

$$\Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a_1 = -2 \quad a_2 = 2$$

Alternative mit Abstandsformel:

$$\left| \frac{a \cdot 0 + 6 \cdot 0 + 9 \cdot 0 - 12}{\sqrt{a^2 + 36 + 81}} \right| = \frac{12}{11} \Rightarrow \left| \frac{-12}{\sqrt{a^2 + 117}} \right| = \frac{12}{11} \Rightarrow \frac{12}{\sqrt{a^2 + 117}} = \frac{12}{11}$$

$$\Rightarrow \sqrt{a^2 + 117} = 11 \Rightarrow a^2 + 117 = 121 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a_1 = -2 \quad a_2 = 2$$

18.7

$$\lambda_1 \cdot \vec{n}_E + \lambda_2 \cdot \vec{n}_F + \lambda_3 \cdot \vec{n}_{H_a} = \vec{0}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & 0 \\ 0 & -3 & 6-4a & 0 \\ 0 & -6 & 9-7a & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & 0 \\ 0 & -3 & 6-4a & 0 \\ 0 & 0 & -3a+9 & 0 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow -3a + 9 = 0 \quad a = 3$$

$\Rightarrow$  für  $a = 3$  hat das LGS unendlich viele Lösungen, d.h. die drei Normalenvektoren sind linear abhängig und bilden damit keine Basis des  $\mathbb{R}^3$

19.1

$$\vec{E}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \left[ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right]$$

$$\vec{E}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$E: \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 - 2 \\ x_2 - 3 \\ x_3 + 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow E: 4x_1 + 4x_2 + 7x_3 - 13 = 0$$

19.2

$$x_1 - x_3 - \text{Ebene}: x_2 = 0$$

$$\Rightarrow 4x_1 + 7x_3 - 13 = 0 \Rightarrow x_1 = 3,25 - 1,75x_3$$

$$\Rightarrow s: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3,25 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1,75 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

19.3

$$P_a \text{ in } E: 4 \cdot 2 + 4a - 7 - 13 = 0 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow P_3(2/3/-1)$$

$$\vec{g}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + k \cdot \left[ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right] \Rightarrow \vec{g}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix}$$

19.4

$$\vec{l}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\text{lin E: } 4 \cdot (8 + 4s) + 4 \cdot (5 + 4s) + 7 \cdot (6 + 7s) - 13 = 0 \Rightarrow s = -1$$

$$\Rightarrow \vec{s} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow d(A; E) = |\vec{AS}| = \left| \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{16 + 16 + 49} = 9$$

Spiegelpunkt:

$$\vec{a}' = \vec{s} + \vec{AS} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -8 \end{pmatrix} \Rightarrow A'(0/-3/-8)$$

19.5

$$\vec{BA} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\vec{BQ}_b = \begin{pmatrix} -2b \\ b \\ b+1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2b-4 \\ b-1 \\ b+2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{BA} \circ \vec{BQ}_b = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -2b-4 \\ b-1 \\ b+2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow -8b - 16 + 4b - 4 + 7b + 14 = 0 \Rightarrow b = 2$$

19.6

$$V = \frac{1}{6} \left| (\vec{BA} \times \vec{BQ}_2) \circ \vec{BP}_3 \right|$$

$$\vec{BA} \times \vec{BQ}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -72 \\ 36 \end{pmatrix} \quad \vec{BP}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(\vec{BA} \times \vec{BQ}_2) \circ \vec{BP}_3 = \begin{pmatrix} 9 \\ -72 \\ 36 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = -18 - 144 = -162$$

$$\Rightarrow V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{6} |-162| = 27$$

19.7

$$\begin{pmatrix} c-1,5 \\ c^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

(I)  $c-1,5=6\lambda$

(II)  $c^2=2\lambda$

(III)  $0=7\lambda \Rightarrow \lambda=0$

(II)  $\Rightarrow c^2=0 \Rightarrow c=0$

(I)  $\Rightarrow 0-1,5=6 \cdot 0$  (f)

$\Rightarrow \vec{r}_g$  und  $\vec{r}_{f_c}$  für alle  $c$  linear unabhängig

$\Rightarrow g$  und  $f_c$  schneiden sich oder sind windschief

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} c-1,5 \\ c^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

(I)  $6+(c-1,5)k=8+6u$

(II)  $5+c^2k=5+2u$

(III)  $4=6+7u \Rightarrow u=-\frac{2}{7}$

(II)  $\Rightarrow 5+c^2k=5-\frac{4}{7} \Rightarrow c^2k=-\frac{4}{7} \Rightarrow k=\frac{-4}{7c^2}$  für  $c \neq 0$

(I)  $\Rightarrow 6+(c-1,5) \cdot \left(\frac{-4}{7c^2}\right) = 8-\frac{12}{7} \Rightarrow 6-\frac{4}{7c} + \frac{6}{7c^2} = \frac{44}{7}$

$\Rightarrow -\frac{4}{7c} + \frac{6}{7c^2} = \frac{2}{7} \Rightarrow -4c+6=2c^2$

$\Rightarrow 2c^2+4c-6=0 \Rightarrow c_1=-3 \quad c_2=2$

20.1

$$\vec{u}_k = \begin{pmatrix} 40 \\ -20 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{Gerade im } \mathbb{R}^3$$

Vektor von einem beliebigen Punkt der Geraden zu F

$$\begin{pmatrix} 6000 \\ 1000 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 40 - 2k \\ -20 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2k + 5960 \\ 1020 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2k + 5960 \\ 1020 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow -4k - 11920 = 0 \Rightarrow k = -2980$$

$$\Rightarrow d_{\min} = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 1020 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = 1020$$

Der minimale Abstand vom U-Boot zum Forschungsschiff beträgt 1020m.

20.2.1

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 6000 \\ 1000 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \left[ \begin{pmatrix} 200 \\ 5000 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6000 \\ 1000 \\ 0 \end{pmatrix} \right] + t \cdot \left[ \begin{pmatrix} 20 \\ -20 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6000 \\ 1000 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 6000 \\ 1000 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -5800 \\ 4000 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -5980 \\ -1020 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1587 \\ 2243 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6000 \\ 1000 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -5800 \\ 4000 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -5980 \\ -1020 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(I)  $1587 = 6000 - 5800s - 5980t$

(II)  $2243 = 1000 + 4000s - 1020t$

(III)  $0 = 0$

(II)  $\Rightarrow 4000s = 1243 + 1020t \Rightarrow s = \frac{1243}{4000} + \frac{51}{200}t$

(I)  $\Rightarrow 1587 = 6000 - 5800 \cdot \left( \frac{1243}{4000} + \frac{51}{200}t \right) - 5980t$

$\Rightarrow 7459t = 2610,65 \Rightarrow t = \frac{7}{20}$

$\Rightarrow s = \frac{1243}{4000} + \frac{51}{200} \cdot \frac{7}{20} = \frac{2}{5}$

$\Rightarrow B$  liegt im Inneren des Dreiecks  $FLU_{10}$ , weil  $t > 0, s > 0$  und  $s + t < 1$

20.2.2

$$\begin{aligned}
 \vec{x} &= \begin{pmatrix} 6000 \\ 1000 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \left[ \begin{pmatrix} 200 \\ 5000 \\ 50 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6000 \\ 1000 \\ 0 \end{pmatrix} \right] + t \cdot \begin{pmatrix} -5980 \\ -1020 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 \vec{x} &= \begin{pmatrix} 6000 \\ 1000 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -5800 \\ 4000 \\ 50 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -5980 \\ -1020 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 \vec{n}_E &= \begin{pmatrix} -5800 \\ 4000 \\ 50 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5980 \\ -1020 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 51000 \\ -299000 \\ 29836000 \end{pmatrix} \\
 E: \begin{pmatrix} 51 \\ -299 \\ 29836 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 - 6000 \\ x_2 - 1000 \\ x_3 \end{pmatrix} &= 0 \Rightarrow E: 51x_1 - 299x_2 + 29836x_3 - 7000 = 0
 \end{aligned}$$

20.2.3

Alle Punkte in der Ebene E mit  $x_3 = 0$

$$51x_1 + 299x_2 - 7000 = 0$$

$$x_1 = k \text{ beliebig}$$

$$51k + 299x_2 - 7000 = 0 \Rightarrow 299x_2 = 7000 - 51k \Rightarrow x_2 = \frac{7000}{299} - \frac{51}{299}k$$

$$\Rightarrow P_k \left( k / \frac{7000}{299} - \frac{51}{299}k / 0 \right)$$

20.3.1

$$\vec{t}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 20 \\ -20 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 120 \\ 300 \\ -100 \end{pmatrix}$$

$$0 - 100k = 200 \Rightarrow k = -2$$

$$\Rightarrow \vec{t} = \begin{pmatrix} 20 \\ -20 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 120 \\ 300 \\ -100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 260 \\ 580 \\ -200 \end{pmatrix} \Rightarrow T(260/580/-200)$$

$$\overrightarrow{U_{10}T} = \begin{pmatrix} 260 \\ 580 \\ -200 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 20 \\ -20 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 240 \\ 600 \\ -200 \end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{U_{10}T}| = \left| \begin{pmatrix} 240 \\ 600 \\ -200 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{240^2 + 600^2 + (-200)^2} = \sqrt{457600} \approx 676,46$$

Die zurückgelegte Strecke beträgt etwa 676 m.

20.3.2

$$\vec{n}_{\text{Wasseroberfläche}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\sin \alpha = \frac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 120 \\ 300 \\ -100 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 120 \\ 300 \\ -100 \end{pmatrix} \right|} = \frac{|-100|}{1 \cdot 20\sqrt{286}} \approx 0,29566$$

$$\Rightarrow \alpha \approx 17,20^\circ > 16^\circ$$

$\Rightarrow$  Das U-Boot taucht zu steil.

21.1

$$\begin{pmatrix} 3q-1 \\ 2q \\ q+1 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(I)  $3q-1 = \lambda$

(II)  $2q = 0$

(III)  $q+1 = -\lambda$

(II)  $\Rightarrow q = 0 \Rightarrow$  (I)  $\lambda = -1$  (III)  $\lambda = -1$

$\Rightarrow$  für  $q=0$  sind  $\vec{r}_g$  und  $\vec{r}_h$  linear abhängig und damit  $g_0$  und  $h$

echt parallel oder identisch

Punktprobe:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (\text{II}) \Rightarrow 1 = 2 \text{ (f)}$$

$\Rightarrow g_0$  und  $h$  echt parallel

$q \neq 0$ :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ q \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3q-1 \\ 2q \\ q+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(I)  $(3q-1) \cdot \lambda = 1 + \mu$

(II)  $1 + 2q\lambda = 2$

(III)  $q + (q+1)\lambda = -\mu$

(II)  $\Rightarrow q\lambda = 0,5$

(I)  $\Rightarrow 1,5 - \lambda = 1 + \mu \Rightarrow \mu = 0,5 - \lambda$

(III)  $\Rightarrow q + q\lambda + \lambda = -0,5 + \lambda \Rightarrow q + 0,5 = -0,5 \Rightarrow q = -1$

$\Rightarrow$  für  $q = -1$  schneiden sich  $g_{-1}$  und  $h$

für  $q \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$ :  $g_q$  und  $h$  windschief

21.2.1

$$\vec{g}_{-1} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\cos \alpha = \frac{\left| \vec{r}_{g_{-1}} \circ \vec{r}_h \right|}{\left| \vec{r}_{g_{-1}} \right| \cdot \left| \vec{r}_h \right|}$$

$$\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -4 \quad \left| \vec{r}_{g_{-1}} \right| = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} \quad \left| \vec{r}_h \right| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{4}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{2}} \Rightarrow \alpha \approx 50,8^\circ$$

21.2.2

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_E = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$E : \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 - 1 \\ x_3 + 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow E : 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 6 = 0$$

22.1

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\left| \vec{AB} \right| = \sqrt{16+9} = 5$$

$$\vec{OQ} = \vec{OB} + 1,25 \cdot \frac{1}{5} \cdot \vec{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + 0,25 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1,25 \end{pmatrix} \Rightarrow Q(5/5/1,25)$$

22.2

$$\vec{M}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \vec{AB} + t \cdot \vec{AD}$$

$$\vec{M}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_M = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ 20 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}_M = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{M}: \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 - 5 \\ x_2 \\ x_3 - 5 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow M: 3x_2 + 4x_3 - 20 = 0$$

22.3

$$A_{\text{Trapez}} = \frac{5+2}{2} \cdot 4 = 14 \quad (x_1 - \text{Achse bis A: } 5; \overline{EB} = 2; x_1 - \text{Achse bis E: } 4)$$

$$\Rightarrow V = 14 \cdot 5 = 70 \text{m}^3 \quad (x_2 - \text{Achse bis E: } 5)$$

## 22.4

Die Strebe [AB] ist von U weiter entfernt, weil  $x_1$ -Komponente von U 2,4 ist

Gesucht ist der Abstand von U zur Geraden AB

$$H: \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 - 2,4 \\ x_2 - 1,5 \\ x_3 - 2,8 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow H: 4x_2 - 3x_3 + 2,4 = 0$$

$$\vec{g}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ in H einsetzen:}$$

$$4 \cdot 4k - 3(5 - 3k) + 2,4 = 0 \Rightarrow 16k - 15 + 9k + 2,4 = 0$$

$$\Rightarrow 25k - 12,6 = 0 \Rightarrow k = 0,504$$

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + 0,504 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2,016 \\ 3,488 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow d(U;g) = |\vec{UF}| = \left| \begin{pmatrix} 2,6 \\ 0,516 \\ 0,688 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{2,6^2 + 0,516^2 + 0,688^2} = \sqrt{7,4996} \approx 2,74 \text{ m}$$

## 22.5.1

$$s: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -0,8 \\ -1,4 \end{pmatrix}$$

$$M \cap s = \{T\}$$

$$3(4 - 0,8t) + 4(-1,4t) - 20 = 0 \Rightarrow 12 - 2,4t - 5,6t - 20 = 0$$

$$\Rightarrow -8 - 8t = 0 \Rightarrow t = -1$$

$$\vec{t} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -0,8 \\ -1,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4,8 \\ 1,4 \end{pmatrix} \Rightarrow T(4/4,8/1,4)$$

22.5.2 Aufgrund der Koordinaten des Punktes T im Vergleich zu den Koordinaten des Punktes Q, muss der Punkt T auf der Markise und damit E im Schatten liegen.

23.1

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{BC} = \begin{pmatrix} -30 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{CD} = \begin{pmatrix} 0 \\ -30 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{DA} = \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{AB}| = |\vec{BC}| = |\vec{CD}| = |\vec{DA}| = 30$$

$$\vec{AB} \circ \vec{BC} = 0 \quad \vec{AB} \circ \vec{DA} = 0$$

⇒ ABCD quadratisch

23.2

$$s: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \left[ \begin{pmatrix} 2 \\ 31 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right] \Rightarrow s: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_s = \frac{1}{30} \cdot \vec{r}_g \Rightarrow s \text{ und } g \text{ echt parallel oder identisch}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 \\ -24 \\ 3 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (l) \Rightarrow 2 = 27 (f) \Rightarrow s \text{ und } g \text{ echt parallel}$$

23.3

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \left[ \begin{pmatrix} 2 \\ 31 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right] + t \cdot \left[ \begin{pmatrix} -28 \\ 31 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right] \Rightarrow E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -30 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow E: \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 - 2 \\ x_2 - 1 \\ x_3 - 3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow E: x_3 - 3 = 0$$

E ist echt parallel zur  $x_1 - x_2$ -Koordinatenebene

23.4

$$A_{\text{Dreieck ABS}} = \frac{1}{2} \cdot |\vec{AB} \times \vec{AS}| \quad \vec{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{AS} = \begin{pmatrix} -15 \\ 15 \\ 27 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AB} \times \vec{AS} = \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -15 \\ 15 \\ 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 810 \\ 0 \\ 450 \end{pmatrix}$$

$$A_{\text{Dreieck ABS}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{810^2 + 450^2} = 45\sqrt{106}$$

$$\Rightarrow \text{Mantelfläche: } 4 \cdot 45\sqrt{106} = 180\sqrt{106} \approx 1853,2 \text{ m}^2$$

$$\Rightarrow \text{Kosten: } 5 \cdot 180\sqrt{106} \approx 9266 \text{ Euro}$$

23.5

$$\vec{BS} = \begin{pmatrix} -15 \\ -15 \\ 27 \end{pmatrix} \quad \vec{n}_E = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{BS}| = \sqrt{(-15)^2 + (-15)^2 + 27^2} = 3\sqrt{131} \quad |\vec{n}_E| = 1$$

$$\sin \alpha = \frac{\left| \begin{pmatrix} -15 \\ -15 \\ 27 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{3\sqrt{131}} = \frac{27}{3\sqrt{131}} \approx 0,7863 \quad \Rightarrow \alpha \approx 51,84^\circ$$

23.7

$$l: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -30 \\ 19 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Ebene durch die Punkte A, B, S:

$$H: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -15 \\ 15 \\ 27 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -15 \\ 15 \\ 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -30 \\ 19 \\ 9 \end{pmatrix} \Rightarrow s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -15 \\ 15 \\ 27 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ -19 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} -15 & 0 & 30 & 25 \\ 15 & 30 & -19 & -4 \\ 27 & 0 & -9 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} -15 & 0 & 30 & 25 \\ 0 & -450 & -165 & -315 \\ 0 & 0 & -675 & -675 \end{array} \right)$$

$$(III) \Rightarrow t = 1 \quad (II) \Rightarrow s = \frac{1}{3} \quad (I) \Rightarrow k = \frac{1}{3}$$

s und k zwischen 0 und 0,5  $\Rightarrow$  Lichtstrahl trifft die gläserne Seitenfläche ABS

24.1 Richtig. Zwei linear unabhängige Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  spannen ein Parallelogramm auf.

24.2 Möglich. Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  stehen dann aufeinander senkrecht.

24.3 Richtig.

Der Betrag des Spatprodukts gibt das Volumen eines Spats an, unabhängig von der Reihenfolge der verwendeten Vektoren.

24.4 Falsch.

Drei linear unabhängige Vektoren bilden eine Basis des  $\mathbb{R}^3$ .

24.5 Falsch.

Drei linear unabhängige Vektoren bilden eine Basis des  $\mathbb{R}^3$  und damit lässt sich jeder weitere Vektor des  $\mathbb{R}^3$  als Linearkombination dieser Basisvektoren darstellen.

25.1

$$\overrightarrow{AB_k} = s \cdot \overrightarrow{AC_k} \Rightarrow \begin{pmatrix} k-1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ k-1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(I)  $k-1=3s$

(II)  $-1=ks-s$

(III)  $1=s$

(I)  $\Rightarrow k-1=3 \Rightarrow k=4$

(II)  $\Rightarrow -1=4-1$  (f)

Die Punkte A, B<sub>k</sub> und C<sub>k</sub> können nicht auf einer Geraden liegen.

25.2

$$A(1|3|-2) \quad B_1(1|2|-1) \quad C_1(4|3|-1)$$

$$\vec{E}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{E}: \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1-1 \\ x_2-3 \\ x_3+2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow E: -x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 2 = 0$$

26.1

$$l: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{lin } E: s + 4s + s = 2 \Rightarrow 6s = 2 \Rightarrow s = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow L \left( \frac{1}{3} \mid \frac{2}{3} \mid -\frac{1}{3} \right)$$

$$\Rightarrow \vec{p} = \vec{l} + 0L = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow P \left( \frac{2}{3} \mid \frac{4}{3} \mid -\frac{2}{3} \right)$$

26.2

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 4 \end{array} \right) \quad \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 & -2 \end{array} \right)$$

setze  $x_3 = k$

$$(II) \Rightarrow -2x_2 + 4k = -2 \Rightarrow x_2 = 1 + 2k$$

$$(I) \Rightarrow x_1 + 2(1 + 2k) - k = 2 \Rightarrow x_1 = -3k$$

$$\vec{s}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

27.1

$$\text{Mitte von A und B: } \vec{m} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2} \cdot \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 2,5 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 1,75 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow k: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1,75 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ mit } t \in ]0;2] \text{ bzw. } t \in ]0;2[$$

Alternative:  $S_k(0|1,75|k)$  mit  $k \in ]3;5]$

27.2.1

$$\vec{SC} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 1 \\ 2,5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1,75 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ -0,75 \\ -1,5 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{SC}| = \sqrt{2,25 + \frac{9}{16} + 2,25} = 2,25$$

$\Rightarrow$  Es werden  $2 \cdot 2,25 + 0,5 = 5$  Meter Drahtseil benötigt.

27.2.2

$$\begin{aligned}
 \vec{CB} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1,5 \\ 1 \\ 2,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,5 \\ 0 \\ 0,5 \end{pmatrix} & \vec{CD} &= \begin{pmatrix} 1,5 \\ 2,5 \\ 2,5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1,5 \\ 1 \\ 2,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1,5 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 \vec{CB} \times \vec{CD} &= \begin{pmatrix} -1,5 \\ 0 \\ 0,5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1,5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,75 \\ 0 \\ -2,25 \end{pmatrix} \\
 \sin \alpha &= \frac{\left| \begin{pmatrix} -0,75 \\ 0 \\ -2,25 \end{pmatrix} \right|_{\circ SC}}{\sqrt{\frac{45}{8}} \cdot 2,25} = \frac{2\sqrt{10}}{15} \Rightarrow \alpha \approx 24,94^\circ
 \end{aligned}$$

27.2.3

Hilfsgerade durch C mit Richtungsvektor  $\vec{n}$ :

$$\vec{g}: x = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 1 \\ 2,5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0,75 \\ 0 \\ 2,25 \end{pmatrix}$$

$$\text{setze } x_3 = 0 \Rightarrow 2,5 + 2,25s = 0 \Rightarrow s = -\frac{10}{9}$$

$$\Rightarrow \vec{f} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 1 \\ 2,5 \end{pmatrix} - \frac{10}{9} \cdot \begin{pmatrix} 0,75 \\ 0 \\ 2,25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da die  $x_1$ -Komponente positiv ist, müssen die beiden Stützen im Boden vor dem Haus verankert werden.

$$28.1 \quad E: x_2 + x_3 = 0 \quad P(5|0|0) \Rightarrow 0 + 0 = 0 (w) \Rightarrow P \in E$$

28.2

$$\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{r}_g = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$  Gerade steht senkrecht auf der Ebene.

29.1

$\vec{r}_{f_1}$  und  $\vec{r}_{f_2}$  sind linear unabhängig

$\Rightarrow f_1$  und  $f_2$  schneiden sich oder sind windschief

$$\begin{pmatrix} 150 \\ 20 \\ 125 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 665 \\ 50 \\ 225 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(I)  $150 + 10t_1 = 665 - 5t_2$

(II)  $20 = 50 - 10t_2$

(III)  $125 + 2t_1 = 225$

(II)  $\Rightarrow t_2 = 3$     (III)  $\Rightarrow t_1 = 50$     (I)  $\Rightarrow 150 + 10 \cdot 50 = 665 - 5 \cdot 3$  (w)

$\Rightarrow f_1$  und  $f_2$  schneiden sich

Es kommt zu keiner Kollision, weil die Motordrachenflieger gleichzeitig in den Luftraum eintreten, aber  $t_1 = 50$  und  $t_2 = 3$  sind.

29.2  $s: \vec{x} = \begin{pmatrix} 150 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \sigma \in \mathbb{R}$

30.1

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ a & 4-a & 2a & 5 \end{array} \right) \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 4+2a & 0 & 5 \end{array} \right)$$

$\Rightarrow$  für  $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$  besitzt das LGS unendlich viele Lösungen

$\Rightarrow F$  und  $H_a$  schneiden sich für  $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$  in einer Geraden

30.2

$$\vec{n}_F = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{n}_{H_3} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_F \cdot \vec{n}_{H_3} = 3 - 3 + 12 = 12 \quad |\vec{n}_F| = \sqrt{1+9+4} = \sqrt{14} \quad |\vec{n}_{H_3}| = \sqrt{9+1+36} = \sqrt{46}$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{12}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{46}} \approx 0,4729 \Rightarrow \alpha \approx 61,8^\circ$$

31.1 g verläuft echt parallel zur  $x_1$ - $x_2$ -Ebene und E enthält die  $x_2$ -Achse.

31.2

Gerade l aufstellen, die durch den Ursprung geht und auf E senkrecht steht:

$$l: \vec{x} = s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow d(l; E) = \frac{|1 \cdot s + 3 \cdot 3s|}{\sqrt{1+9}} = \sqrt{10} \Rightarrow |1 \cdot s + 3 \cdot 3s| = 10$$

$$\Rightarrow |10s| = 10 \Rightarrow s = \pm 1 \Rightarrow \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow D(1|0|3) \text{ (mit } s=1)$$

Alternative: Zahlen  $x_1$  und  $x_2$  so suchen, dass  $x_1 + 3x_2 = 10$  gilt.

32.1

$$F: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 3\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3\sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_F = \begin{pmatrix} -3 \\ 3\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 3\sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\sqrt{3} \\ 6 \\ -18\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$F: \begin{pmatrix} 6\sqrt{3} \\ 6 \\ -18\sqrt{3} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 - 0 \\ x_2 - 0 \\ x_3 - 4 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow F: 6\sqrt{3}x_1 + 6x_2 - 18\sqrt{3}x_3 + 72\sqrt{3} = 0$$

32.2

$$\vec{n}_{GF} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{n}_F = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_{GF} \circ \vec{n}_F = 3 \quad |\vec{n}_{GF}| = 1 \quad |\vec{n}_F| = \sqrt{1 + \frac{1}{3} + 9} = \sqrt{10\frac{1}{3}}$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{3}{1 \cdot \sqrt{10\frac{1}{3}}} \approx 0,9326 \Rightarrow \alpha \approx 21,05^\circ$$

32.3

$$\vec{SP} = \frac{1}{3} \cdot \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3\sqrt{6} \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 3\sqrt{3} \\ 4 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\sqrt{3} \\ \frac{14}{3} \end{pmatrix}$$

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\sqrt{3} \\ \frac{14}{3} \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$h \cap x_1 - x_2 - \text{Ebene} = \{H\} \Rightarrow \frac{14}{3} + 3k = 0 \Rightarrow k = -\frac{14}{9}$$

$$\Rightarrow \vec{h} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\sqrt{3} \\ \frac{14}{3} \end{pmatrix} - \frac{14}{9} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{14}{9} \\ \frac{40\sqrt{3}}{27} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{SPH} = \begin{pmatrix} -\frac{14}{9} \\ -\frac{14\sqrt{3}}{27} \\ -\frac{14}{3} \end{pmatrix} \quad |\vec{SPH}| = \sqrt{\left(-\frac{14}{9}\right)^2 + \left(-\frac{14\sqrt{3}}{27}\right)^2 + \left(-\frac{14}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{6076}{243}} \approx 5,00 \text{ m}$$

32.4

$$\text{Ebene } OAA_1O_1: x_1 - x_3 - \text{Ebene} \Rightarrow H: x_2 = 0$$

$$h \cap H = \{L\} \quad -4 + 4s = 0 \Rightarrow s = 1$$

$$\vec{l} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 10 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$x_3 = 5 \Rightarrow$  der Lichtstrahl liegt über der Seitenfläche  $OAA_1O_1$

Das Spotlight müsste mehr als 1 m, aber weniger als 5 m tiefer befestigt werden.

33.1

$$\begin{aligned}
 \vec{FG} &= \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \vec{FS} &= \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix} \\
 \vec{n}_E &= \vec{FG} \times \vec{FS} = \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 96 \\ 72 \end{pmatrix} & \vec{n}_{x_1-x_2\text{-Ebene}} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} 0 \\ 96 \\ 72 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= 72 & \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 96 \\ 72 \end{pmatrix} \right| &= 120 & \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right| &= 1 \\
 \Rightarrow \cos \alpha &= \frac{72}{1 \cdot 120} = \frac{3}{5} & \Rightarrow \alpha &\approx 53,15^\circ > 50^\circ \\
 &\Rightarrow \text{Die Dachneigung ist ausreichend.}
 \end{aligned}$$

33.2.1

$$\begin{aligned}
 \vec{ON} &= \vec{OI} + \vec{IN} & \vec{IN} &\text{ ist parallel zu } \vec{M}_{FG}\vec{S} \\
 \frac{1}{|\vec{M}_{FG}\vec{S}|} \cdot \vec{M}_{FG}\vec{S} &= \vec{M}_{FG}\vec{S}^0 \text{ (Einheitsvektor von } \vec{M}_{FG}\vec{S}) \\
 \Rightarrow \text{mit } |\vec{IN}| &= 3,5 \text{ ergibt sich die richtige Länge des Vektors } \vec{IN} \\
 \vec{m} &= \frac{1}{2} \cdot \left[ \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix} & \Rightarrow M_{FG}(6|12|5) \\
 \Rightarrow \vec{M}_{FG}\vec{S} &= \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 13 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix} \\
 \Rightarrow \vec{ON} &= \begin{pmatrix} 9 \\ 11,7 \\ 5,4 \end{pmatrix} + 3,5 \cdot \frac{1}{\sqrt{36+64}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 11,7 \\ 5,4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2,1 \\ 2,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 9,6 \\ 8,2 \end{pmatrix} \\
 &\Rightarrow N(9|9,6|8,2)
 \end{aligned}$$

33.2.2

$$\begin{aligned}
 A_{\text{kollektor}} &= |\vec{IJ}| \cdot |\vec{IN}| = 6 \cdot 3,5 = 21 \\
 A_{\Delta FGS} &= \frac{1}{2} \cdot |\vec{FG} \times \vec{FS}| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 96 \\ 72 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{96^2 + 72^2} = 60 \\
 \Rightarrow \frac{21}{60} &= 0,35 = 35\%
 \end{aligned}$$

33.2.3

$$\vec{g}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 15 \\ 27 \\ 17 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -9 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ mit } s \in \mathbb{R}$$

Ebene des Sonnenkollektors ist die Ebene E der südlichen Dachfläche

$$E: \begin{pmatrix} 0 \\ 96 \\ 72 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 - 12 \\ x_2 - 12 \\ x_3 - 5 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow E: 96x_2 - 72x_3 - 1512 = 0$$

$$g \cap E = \{R\} \Rightarrow 96 \cdot (27 - 9s) + 72 \cdot (17 - 4s) - 1512 = 0 \Rightarrow s = 2$$

$$\Rightarrow \vec{r} = \begin{pmatrix} 15 \\ 27 \\ 17 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -9 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix} \Rightarrow R(5|9|9)$$

Die  $x_3$ -Komponente von R ist größer als die  $x_3$ -Komponente von N  
 $\Rightarrow R$  liegt außerhalb.

34.1

$$\text{Geringste Tiefe: } -100 + (-20) \cdot (-1) = -80 \Rightarrow 80 \text{ m}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -50 \\ -100 \end{pmatrix} + (-20) \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -140 \\ -250 \\ -80 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -50 \\ -100 \end{pmatrix} + 75 \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 525 \\ 700 \\ -75 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -140 \\ -250 \\ -80 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 525 \\ 700 \\ -75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -665 \\ -950 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left| \begin{pmatrix} -665 \\ -950 \\ -5 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-665)^2 + (-950)^2 + (-5)^2} \approx 1119,0 \text{ m}$$

$$\Rightarrow V = 1119,0 \cdot 7 = 7833,3 \text{ m}^3$$

34.2

$\vec{r}_{s_1}$  und  $\vec{r}_{s_2}$  sind linear unabhängig  $\Rightarrow s_1$  und  $s_2$  schneiden sich oder sind windschief

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -50 \\ -100 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ -150 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{(I)} \quad 7s = 10 - 5t \\ \text{(II)} \quad -50 + 10s = 5 + t \\ \text{(III)} \quad -100 - s = -150 + t \end{array}$$

$$\text{(III)} \Rightarrow t = 50 - s \quad \text{(II)} \Rightarrow t = -55 + 10s$$

$$\Rightarrow 50 - s = -55 + 10s \Rightarrow 11s = 105 \Rightarrow s = \frac{105}{11} \Rightarrow t = 50 - \frac{105}{11} = \frac{445}{11}$$

$$\text{(I)} \Rightarrow 7 \cdot \frac{445}{11} = 10 - 5 \cdot \frac{105}{11} \Rightarrow \frac{3115}{11} = -\frac{415}{11} \text{ (f)}$$

$\Rightarrow s_1$  und  $s_2$  verlaufen windschief zueinander.

34.3

$$\begin{aligned} -150 + s &= -125 \Rightarrow s = 25 \Rightarrow \vec{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ -150 \end{pmatrix} + 25 \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -115 \\ 30 \\ -125 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow s_H : \vec{x} &= \begin{pmatrix} 175 \\ 200 \\ -125 \end{pmatrix} + k \cdot \left[ \begin{pmatrix} -115 \\ 30 \\ -125 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 175 \\ 200 \\ -125 \end{pmatrix} \right] \Rightarrow s_H : \vec{x} = \begin{pmatrix} 175 \\ 200 \\ -125 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -290 \\ -170 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

34.4

$$\text{(I)} \quad 7s = 10 - 5t$$

$$\text{(II)} \quad -50 + 10s = 5 + t$$

$$\text{(II)} \Rightarrow t = -55 + 10s$$

$$\text{(I)} \Rightarrow 7s = 10 - 5 \cdot (-55 + 10s) \Rightarrow 7s = 10 + 275 - 50s \Rightarrow 57s = 285 \Rightarrow s = 5$$

$$\Rightarrow t = -55 + 10 \cdot 5 = -5$$

$$\Rightarrow \vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -50 \\ -100 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 \\ 0 \\ -105 \end{pmatrix} \quad \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ -150 \end{pmatrix} - 5 \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 \\ 0 \\ -155 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow N(35|0|0)$$

$\Rightarrow$  Stollen  $s_1$  wird nach  $\frac{105}{5} = 21$  Stunden erreicht und Stollen  $s_2$  nach  $\frac{155}{5} = 31$  Stunden.

35.1

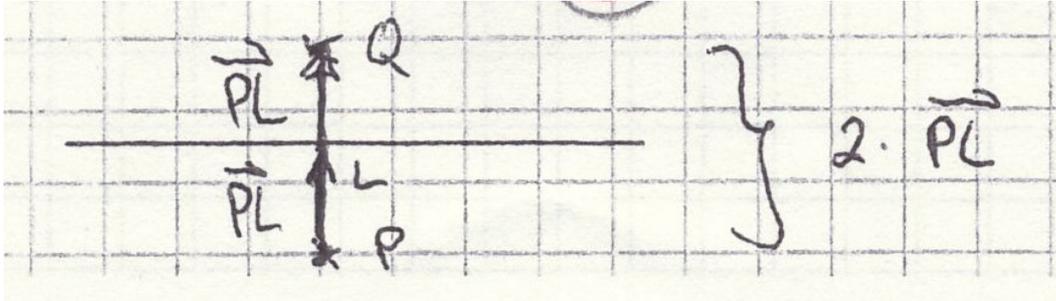
$$P \text{ in } E \text{ einsetzen: } -(-2-t) + (4+t) = 5 \Rightarrow 2+t+4+t = 5 \Rightarrow t = -\frac{1}{2}$$

$$t \text{ in } g: \vec{OL} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1,5 \\ 3,5 \end{pmatrix} \Rightarrow L(4|-1,5|3,5)$$

35.2

$$\vec{OQ} = \vec{OP} + 2 \cdot \vec{PL} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + 2 \cdot \left[ \begin{pmatrix} 4 \\ -1,5 \\ 3,5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0,5 \\ -0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Q(4|-1|3)$$



36.1

A(4|0|0) B(4|4|0) C(0|4|0)

$$\vec{OE} = \vec{OA} + 2 \cdot \vec{AP} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow E(6|2|6)$$

36.2

$$K: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}}^{\vec{PQ}} + t \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}}^{\vec{PF}} \quad s, t \in \mathbb{R}$$

$$\vec{n}_K = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 6 \\ -16 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}_K^* = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$K: \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 - 5 \\ x_2 - 1 \\ x_3 - 3 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow K: 9x_1 + 3x_2 - 8x_3 - 24 = 0$$

36.3

$$\vec{DF} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \quad |\vec{DF}| = \sqrt{36 + 36 + 36} = \sqrt{108}$$

$$|\vec{n}_K| = \sqrt{81 + 9 + 64} = \sqrt{154} \quad \vec{DF} \circ \vec{n}_K = 54 + 18 - 48 = 24$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{24}{\sqrt{108} \cdot \sqrt{154}} \approx 0,18610 \quad \Rightarrow \alpha \approx 10,73^\circ$$

36.4

$$g_1: \vec{x} = s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad s \in \mathbb{R} \quad K \cap g_1 = \{R\} \Rightarrow 9s - 24 = 0 \Rightarrow s = \frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow R \left( \frac{8}{3} \mid 0 \mid 0 \right)$$

$$g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}^{\overline{CB}} \quad t \in \mathbb{R} \quad K \cap g_2 = \{S\}$$

$$\Rightarrow 9 \cdot 4t + 3 \cdot 4 - 24 = 0 \Rightarrow 36t - 12 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{3} \Rightarrow S \left( \frac{4}{3} \mid 4 \mid 0 \right)$$

36.5

Man muss das Viereck PRSF in zwei Dreiecke PRS und PSF zerlegen.

$$A_{\text{PRSF}} = \frac{1}{2} \cdot |\overline{PR} \times \overline{PS}| + \frac{1}{2} \cdot |\overline{PS} \times \overline{PF}|$$

$$\text{Alternative: } A_{\text{PRSF}} = \frac{|\overline{RP}| + |\overline{SF}|}{2} \cdot h \quad h \text{ ist der Abstand der beiden Geraden RP und SF}$$

37.1

$$K: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}}^{\overline{AB}} + t \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}}^{\overline{AC}} \quad s, t \in \mathbb{R}$$

$$\vec{n}_K = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 30 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}_K^* = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow K: \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 - 7 \\ x_2 - 7 \\ x_3 - 2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow K: 3x_1 + 4x_2 + 10x_3 - 69 = 0$$

37.2

$$\text{Hallenboden: } x_3 = 0 \quad \vec{n}_H = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{n}_H| = 1$$

$$|\vec{n}_K| = \sqrt{9+16+100} = \sqrt{125} \quad \vec{n}_H \circ \vec{n}_K = 10$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{10}{1 \cdot \sqrt{125}} \approx 0,89443 \Rightarrow \alpha \approx 26,57^\circ$$

37.3

$$A_{\text{Trapez}} = \frac{|\overline{AB}| + |\overline{DC}|}{2} \cdot h \quad h = |\overline{M_1 M_2}|$$

$M_1$  ist Mittelpunkt von  $\overline{AB}$  und  $M_2$  ist Mittelpunkt von  $\overline{DC}$

37.4

$$\vec{g}_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}}^{\overline{AC}} \quad s \in \mathbb{R} \quad \vec{g}_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -7,5 \\ 3 \end{pmatrix}}^{\overline{BD}} \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -7,5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{(I)} \quad 7 - 6s = 3$$

$$\text{(II)} \quad 7 - 3s = 10 - 7,5t$$

$$\text{(III)} \quad 2 - 3s = 2 + 3t$$

$$\text{(I)} \Rightarrow s = \frac{2}{3}$$

$$\text{(II)} \Rightarrow 7 - 3 \cdot \frac{2}{3} = 10 - 7,5t \Rightarrow 5 = 10 - 7,5t \Rightarrow t = \frac{2}{3}$$

$$\text{(III)} \Rightarrow 2 + 3 \cdot \frac{2}{3} = 2 + 3 \cdot \frac{2}{3} \Rightarrow 4 = 4 \text{ (w)}$$

$\Rightarrow g_1$  und  $g_2$  schneiden sich

$$\Rightarrow \vec{e} = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -7,5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow E(3|5|4)$$

37.5

$$\vec{EF} = \begin{pmatrix} 1,4 \\ 0,2 \\ -0,5 \end{pmatrix} \quad |\vec{EF}| = \sqrt{1,96 + 0,04 + 0,25} = 1,5$$

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{AB}| = \sqrt{16 + 9} = 5 \quad \Rightarrow \vec{AB}^0 = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,8 \\ 0,6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{g} = \vec{f} + 1,5 \cdot \begin{pmatrix} -0,8 \\ 0,6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,4 \\ 5,2 \\ 3,5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1,2 \\ 0,9 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,2 \\ 6,1 \\ 3,5 \end{pmatrix} \Rightarrow G(3,2 | 6,1 | 3,5)$$

38.1

$$\vec{PQ} = \begin{pmatrix} -6 \\ 22 \\ 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 20 \\ 8 \end{pmatrix}$$

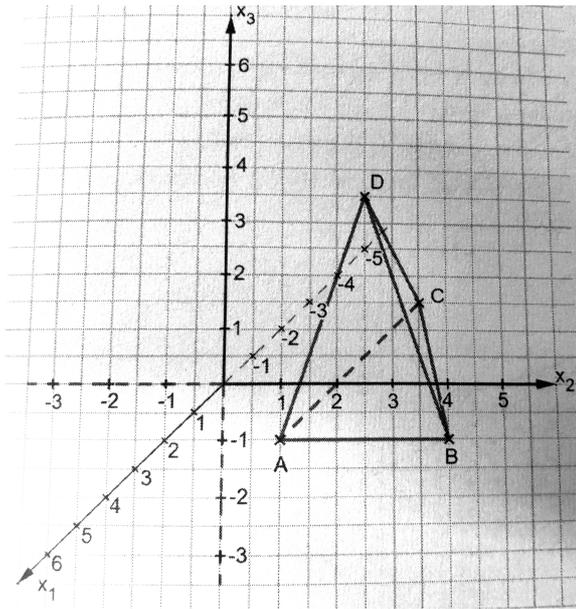
$$\vec{g}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ 20 \\ 8 \end{pmatrix} \quad s \in \mathbb{R}$$

$$\vec{r}_g = k \cdot \vec{n}_E \Rightarrow \begin{pmatrix} -12 \\ 20 \\ 8 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{(I)} -12 = 3k \Rightarrow k = -4 \\ \text{(II)} 20 = -5k \Rightarrow k = -4 \\ \text{(III)} 8 = -2k \Rightarrow k = -4 \end{array}$$

$\Rightarrow \vec{r}_g$  und  $\vec{n}_E$  sind linear abhängig  $\Rightarrow g$  senkrecht zu E

38.2 F:  $\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 + 6 \\ x_2 - 22 \\ x_3 - 12 \end{pmatrix} = 0$

39.1



39.2

$$l: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad H_{\text{Grundfläche ABC}}: x_3 = 0$$

$$H \cap l = \{L\} \Rightarrow 4 + s = 0 \Rightarrow s = -4 \Rightarrow \vec{l} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow L(1|3|0)$$

40.1

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \left[ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \right]$$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E: \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 - 4 \\ x_2 \\ x_3 + 3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow E: x_1 - 2x_2 - 4 = 0$$

40.2

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} k \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(I)  $4 + 2\lambda = 4,5 + k\mu$

(II)  $\lambda = 4 - 2\mu$

(III)  $-3 + 2\lambda = -1 + 2\mu$

(II) in (III):  $-3 + 2(4 - 2\mu) = -1 + 2\mu \Rightarrow -3 + 8 - 4\mu = -1 + 2\mu \Rightarrow \mu = 1$

$\Rightarrow \lambda = 4 - 2 \cdot 1 = 2$

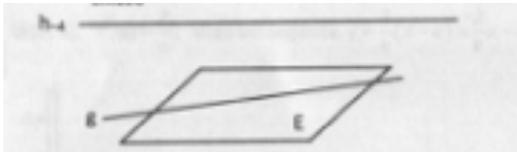
(I)  $\Rightarrow 4 + 2 \cdot 2 = 4,5 + k \Rightarrow k = 3,5$

$$\Rightarrow \vec{s} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow S(8|2|1)$$

40.3

$h_{-4}$  in E:  $4,5 - 4\mu - 2(4 - 2\mu) - 4 = 0 \Rightarrow -7,5 = 0$  (f)

$\Rightarrow h_{-4}$  echt parallel zu E



$h_{-4}$  und g sind zueinander windschief

41.1  $\vec{p}_4 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \vec{p}_3 = \begin{pmatrix} 1,8 \\ 1,2 \\ 1,5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1,2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,8 \\ 0 \\ 1,5 \end{pmatrix} \Rightarrow P_4(1,8|0|1,5)$

41.2

$$\vec{N}_1 \vec{N}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1,2 \\ 1,4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1,8 \\ 1,2 \\ 1,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{N}_1 \vec{N}_3 = \begin{pmatrix} 0,9 \\ 3,6 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1,8 \\ 1,2 \\ 1,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,9 \\ 2,4 \\ -1,4 \end{pmatrix}$$

$$A = \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} -1,8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -0,9 \\ 2,4 \\ -1,4 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} 0 \\ -2,52 \\ -4,32 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(-2,52)^2 + (-4,32)^2} = \frac{9 \cdot \sqrt{193}}{50} \approx 2,5$$

$$41.3 \cos \alpha = \frac{\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ -2,52 \\ -4,32 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ -2,52 \\ -4,32 \end{vmatrix}} = \frac{|-4,32|}{1 \cdot \frac{9 \cdot \sqrt{193}}{25}} = \frac{12}{\sqrt{193}} \approx 0,8638 \Rightarrow \alpha \approx 30,26^\circ$$

42.1

$$\vec{d} = \vec{a} + \vec{AD} = \vec{a} + \vec{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow D(-4|8|0)$$

$$\vec{AB} \circ \vec{BC} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = -48 + 48 = 0$$

$\Rightarrow$  die Grundfläche ABCD ist bei B rechtwinklig

42.2

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R}$$

$\vec{r}_g$  und  $\vec{r}_h$  linear abhängig  $\Rightarrow g$  und  $h$  echt parallel oder identisch

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(I)  $2 = -4 - s \Rightarrow s = -6$

(II)  $2 = 1 + s \Rightarrow s = 1$

(III)  $0 = 0$

$\Rightarrow g$  und  $h$  echt parallel

42.3

$$V_{\text{Haus}} = V_{\text{Quader}} + V_{\text{Prisma}}$$

$$V_{\text{Quader}} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot |\overrightarrow{AE}|$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{64+64} = 8\sqrt{2} \quad |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{36+36} = 6\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow V_{\text{Quader}} = 8\sqrt{2} \cdot 6\sqrt{2} \cdot 3 = 288$$

$$V_{\text{Prisma}} = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{EH} \times \overrightarrow{EJ}| \cdot |\overrightarrow{JK}|$$

$$\overrightarrow{EH} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{EJ} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 24 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \left| \begin{pmatrix} 24 \\ 24 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = 24\sqrt{2}$$

$$|\overrightarrow{JK}| = |\overrightarrow{AB}| = 8\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow V_{\text{Prisma}} = \frac{1}{2} \cdot 24\sqrt{2} \cdot 8\sqrt{2} = 192$$

$$\Rightarrow V_{\text{Haus}} = 288 + 192 = 480 \text{ m}^3$$

42.4

$$\cos \alpha = \frac{|\overrightarrow{EH} \circ \overrightarrow{EJ}|}{|\overrightarrow{EH}| \cdot |\overrightarrow{EJ}|} \quad \overrightarrow{EH} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{EJ} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{EH} \circ \overrightarrow{EJ} = 18 + 18 = 36 \quad |\overrightarrow{EH}| = 6\sqrt{2} \quad |\overrightarrow{EJ}| = \sqrt{9+9+16} = \sqrt{34}$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{36}{6\sqrt{2} \cdot \sqrt{34}} \approx 0,72761 \quad \Rightarrow \alpha \approx 43,31^\circ$$

$\Rightarrow$  Der Dachneigungswinkel erfüllt die Bauvorschrift

42.5

$$Z: \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 + 1 \\ x_2 - 5 \\ x_3 - 6 \end{pmatrix} = 0 \quad Z: x_3 - 6 = 0$$

$$\text{Ebene EFKJ: } \vec{E}: \vec{x} = \vec{e} + s \cdot \vec{EF} + t \cdot \vec{EJ} \quad \vec{E}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ -32 \\ 48 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}_E^* = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow E: \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 - 2 \\ x_2 - 2 \\ x_3 - 3 \end{pmatrix} = 0 \quad E: 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 9 = 0$$

$$Z \cap E: 2x_1 - 2x_2 + 18 - 9 = 0 \quad x_2 = r \text{ beliebig}$$

$$2x_1 - 2r + 9 = 0 \Rightarrow x_1 = -4,5 + r$$

$$\Rightarrow s: \vec{x} = \begin{pmatrix} -4,5 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

42.6

$$\text{Benötigte Wassermenge im Juli: } 113 \text{ m}^2 \cdot 2,5 \frac{\text{l}}{\text{m}^2} = 8757,5 \text{ l}$$

$$\text{Grundfläche des Hauses: } A = |\overline{AB}| \cdot |\overline{BC}| = 8\sqrt{2} \cdot 6\sqrt{2} = 96 \text{ m}^2$$

$$\Rightarrow 96 \text{ m}^2 \cdot 101 \frac{\text{l}}{\text{m}^2} = 9696 \text{ l}$$

\(\Rightarrow\) Die Bewässerung kann im Monat Juli gemäß der statistischen Daten durchgeführt werden.

43.1

$$\vec{EC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \vec{ED} = \begin{pmatrix} -16 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \vec{EC} \times \vec{ED} = \begin{pmatrix} 0 \\ -91 \\ 117 \end{pmatrix}$$

$$G: \begin{pmatrix} 0 \\ -91 \\ 117 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 - 15 \\ x_2 \\ x_3 - 5 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow G: -91x_2 + 117x_3 - 585 = 0$$

G liegt echt parallel zur  $x_1$ -Achse.

43.2

$$\vec{n}_G = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -9 \end{pmatrix} \quad \vec{n}_{\text{Boden}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_G \circ \vec{n}_{\text{Boden}} = -9 \quad |\vec{n}_G| = \sqrt{49+81} = \sqrt{130} \quad |\vec{n}_{\text{Boden}}| = 1$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha) = \frac{|-9|}{\sqrt{130} \cdot 1} \approx 0,78935 \quad \Rightarrow \alpha \approx 37,9^\circ$$

43.3

$$\vec{EC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \vec{EA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix} \quad \vec{EC} \times \vec{EA} = \begin{pmatrix} 180 \\ 60 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{\text{AEC}} = \frac{1}{2} \cdot |\vec{EC} \times \vec{EA}| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{180^2 + 60^2} = 30\sqrt{10} \approx 94,9$$

43.4

(I)  $x_3 = 26$

(II)  $7x_2 - 9x_3 + 45 = 0$

(I) in (II):  $7x_2 - 9 \cdot 26 + 45 = 0 \Rightarrow x_2 = 27$

$$\Rightarrow \vec{s} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 27 \\ 26 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$  Mindestabstand: 27 dm

43.5

Geradengleichungen AD und BC aufstellen, K ist dann der Schnittpunkt von AD und BC  
 Gerade g durch K senkrecht zur Ebene ACDB aufstellen, Richtungsvektor ist der Normalenvektor der Ebene ACDB  
 Montagepunkt ist der Schnittpunkt von g mit der Ebene  $AE_1F_1B$

43.6

$$V_{\text{ABCF}} = \frac{1}{6} \cdot \left| \vec{AF} \circ (\vec{AC} \times \vec{AB}) \right|$$

$$\vec{AF} = \begin{pmatrix} -17 \\ 0 \\ -20 \end{pmatrix} \quad \vec{AC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ -13 \end{pmatrix} \quad \vec{AB} = \begin{pmatrix} -26 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{AC} \times \vec{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 338 \\ 236 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow V_{\text{ABCF}} = \frac{1}{6} \cdot \left| \begin{pmatrix} -17 \\ 0 \\ -20 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 338 \\ 236 \end{pmatrix} \right| = 780$$

44.1

$$H: \vec{x} = \vec{OP} + s \cdot \vec{PQ} + t \cdot \vec{PR} \Rightarrow H: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -7,2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -10,8 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_H = \begin{pmatrix} 0 \\ -7,2 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ -10,8 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 36 \end{pmatrix}$$

$$H: \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 36 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 - 5 \\ x_2 - 0 \\ x_3 - 8 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow H: 10x_2 + 36x_3 - 288 = 0$$

H liegt echt parallel zur  $x_1$ -Achse

44.2

$$\vec{n}_H = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 18 \end{pmatrix} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_H \circ \vec{a} = 18 \quad |\vec{n}_H| = \sqrt{25 + 324} = \sqrt{349} \quad |\vec{a}| = 1$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{18}{\sqrt{349} \cdot 1} \approx 0,96352 \Rightarrow \alpha \approx 15,52^\circ > 15^\circ$$

Die örtliche Bauvorschrift wird eingehalten.

44.3

$$\vec{n}_{G_a} = \lambda \cdot \vec{n}_H$$

$$(I) -1,8a + 9,9 = 0 \Rightarrow a = 5,5$$

$$(II) 36 - 6a = 5\lambda$$

$$(III) 10,8 = 18\lambda \Rightarrow \lambda = 0,6$$

$$(II) \Rightarrow 36 - 6 \cdot 5,5 = 5 \cdot 0,6 \Rightarrow 3 = 3 \text{ (w)}$$

44.4

$$G_{5,5}: 3x_2 + 10,8x_3 - 39,96 = 0$$

$$A \Rightarrow 3 \cdot 0 + 10,8 \cdot 3,7 - 39,96 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \Rightarrow A \in G_{5,5}$$

$$B \Rightarrow 3 \cdot 3,42 + 10,8 \cdot 2,75 - 39,96 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \Rightarrow B \in G_{5,5}$$

44.5

$$\vec{AE} = 1,2 \cdot \vec{AB} \quad \vec{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3,42 \\ -0,95 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e} - \vec{a} = 1,2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3,42 \\ -0,95 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{e} = 1,2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3,42 \\ -0,95 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 3,7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4,104 \\ 2,56 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow E(8 | 4,104 | 2,56)$$

44.6

$$L(8 | 3,42 | 0)$$

$$A_{KLBA} = \frac{|\vec{AK}| + |\vec{BL}|}{2} \cdot |\vec{KL}|$$

$$\vec{AK} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3,7 \end{pmatrix} \quad \vec{BL} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2,75 \end{pmatrix} \quad \vec{KL} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3,42 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A_{KLBA} = \frac{3,7 + 2,75}{2} \cdot 3,42 = 11,0295 \quad \Rightarrow A_{DNMCA} = 11,0295$$

$$A_{BLMC} = |\vec{BL}| \cdot |\vec{LM}| \quad \vec{LM} = \vec{AD} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A_{BLMC} = 2,75 \cdot 6 = 16,5$$

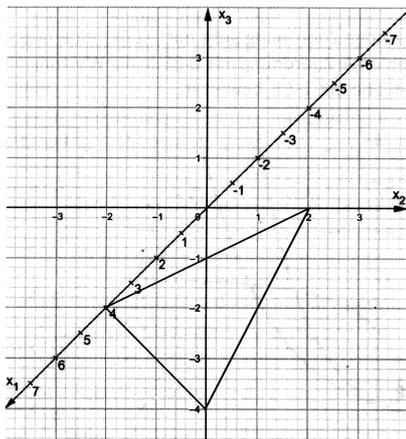
$$\Rightarrow \text{Glasfläche: } 2 \cdot 11,0295 + 16,5 = 38,559$$

$$\Rightarrow \text{Kosten: } 38,559 \cdot 200 = 7711,80 \text{ €}$$

45.1

$$E: x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \quad \Rightarrow E: \frac{x_1}{4} + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{-4} = 1$$

$$\Rightarrow S_1(4 | 0 | 0) \quad S_2(0 | 2 | 0) \quad S_3(0 | 0 | -4)$$



45.2

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -k-2 \\ k \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(I)  $-2 = a$

(II)  $-k-2 = 2a$

(III)  $k = -a$

(III)  $\Rightarrow k = 2$       (II)  $\Rightarrow -2-2 = 2(-2) \Rightarrow -4 = -4$  (w)

$\Rightarrow$  es existiert ein  $k$ , so dass  $g_k$  senkrecht auf  $E$  steht

45.3  $\vec{F}: \vec{x} = s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad s, t \in \mathbb{R}$

46.1

$$g_{QB} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 6,5 \\ 24,5 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \left[ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 30 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6,5 \\ 24,5 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$g_{QB} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 6,5 \\ 24,5 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -7,5 \\ -22,5 \\ 30 \end{pmatrix}$$

$$g_{RC} : \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5,8 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \left[ \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 29 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 5,8 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$g_{QB} : \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5,8 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -5,8 \\ 29 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6,5 \\ 24,5 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -7,5 \\ -22,5 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5,8 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -5,8 \\ 29 \end{pmatrix}$$

(I)  $6,5 - 7,5s = -2$

(II)  $24,5 - 22,5s = 5,8 - 5,8t$

(III)  $30s = 29t$

(I)  $\Rightarrow s = \frac{17}{15}$

(III)  $\Rightarrow 30 \cdot \frac{17}{15} = 29t \Rightarrow t = \frac{34}{29}$

(II)  $\Rightarrow 24,5 - 22,5 \cdot \frac{17}{15} = 5,8 - 5,8 \cdot \frac{34}{29} \Rightarrow -1 = -1 (w)$

$\Rightarrow g_{QB}$  und  $g_{RC}$  schneiden sich

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} 6,5 \\ 24,5 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{17}{15} \cdot \begin{pmatrix} -7,5 \\ -22,5 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 34 \end{pmatrix} \quad S(-2|-1|34)$$

46.2

$$\vec{E}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 31 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_E = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \vec{n}_E^* = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$E: \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 - 2 \\ x_2 \\ x_3 - 31 \end{pmatrix} = 0 \quad E: 2x_1 + x_2 - 4x_3 + 120 = 0$$

$$I: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 34 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$I \cap E: 2(-2 + 2k) + (-1 + k) - 4(34 - 4k) + 120 = 0$$

$$-4 + 4k - 1 + k - 136 + 16k + 120 = 0 \Rightarrow -21 + 21k = 0 \Rightarrow k = 1$$

$$\Rightarrow \vec{f} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 34 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 30 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow d(S; E) = |\vec{f}_S| = \left\| \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{4 + 1 + 16} = \sqrt{21} \approx 4,58$$

46.3

$$\begin{pmatrix} 15 \\ 7,5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 30 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{(I) } 15 = -2t \Rightarrow t = -7,5$$

$$\text{(II) } 7,5 = -t \Rightarrow t = -7,5$$

$$\text{(III) } 0 = 30 + 4t \Rightarrow t = -7,5$$

$\Rightarrow M \in I$

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{n}_{x_1-x_2\text{-Ebene}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_1 \circ \vec{n}_{x_1-x_2\text{-Ebene}} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 4 \quad |\vec{r}_1| = \sqrt{21} \quad |\vec{n}_{x_1-x_2\text{-Ebene}}| = 1$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{4}{\sqrt{21} \cdot 1} \approx 0,87287 \Rightarrow \alpha \approx 60,79^\circ$$

46.4

$$\vec{F}: x = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 30 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 7,5 \\ 22,5 \\ -30 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_F = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7,5 \\ 22,5 \\ -30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37,5 \\ 97,5 \\ 82,5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_F \circ \vec{n}_E = \begin{pmatrix} 37,5 \\ 97,5 \\ 82,5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = 75 + 97,5 - 330 = -157,5$$

$$|\vec{n}_E| = \sqrt{21} \quad |\vec{n}_F| = \sqrt{1406,25 + 9506,25 + 6806,25} = \sqrt{17718,75}$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{|-157,5|}{\sqrt{21} \cdot \sqrt{17718,75}} \approx 0,2582 \Rightarrow \alpha \approx 75,04^\circ$$

$$\Rightarrow \beta = 180^\circ - 75,04^\circ = 104,96^\circ$$

47.1

$$V_{\text{Zelt}} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

$$G = |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{AB}| = 10 \cdot 10 = 100 \quad h = 9,3$$

$$\Rightarrow V_{\text{Zelt}} = \frac{1}{3} \cdot 100 \cdot 9,3 = 310 \text{ m}^3$$

$\Rightarrow$  es dürfen sich  $310 \cdot 0,2 = 61$  Personen gleichzeitig im Zelt aufhalten

47.2.1

$$A_{\text{Dreieck OAS}} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot |\overrightarrow{MS}| \quad \text{M ist Mittelpunkt der Strecke } \overrightarrow{OA} \quad \vec{m} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{MS} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 9,3 \end{pmatrix} \quad |\overrightarrow{MS}| = \sqrt{5^2 + 9,3^2} = \sqrt{111,49} \approx 10,56$$

$$\Rightarrow A_{\text{Dreieck OAS}} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10,56 \approx 52,8 \text{ m}^2$$

$$\Rightarrow A_{\text{Projektionsfläche}} = 3 \cdot 52,8 = 158,4 \text{ m}^2$$

$$\Rightarrow \text{Materialkosten: } 158,4 \cdot 15,30 = 2423,52 \text{ Euro}$$

47.2.2

$d(P;H)$

$$l: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -93 \\ 50 \end{pmatrix}$$

$$l \cap H = \{F\} \Rightarrow -93(-93s) + 50(4 + 50s) = 0$$

$$\Rightarrow 8649s + 200 + 2500s = 0 \Rightarrow 11149s + 200 = 0 \Rightarrow s = -\frac{200}{11149} \approx -0,018$$

$$\Rightarrow \vec{f} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - 0,018 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -93 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1,674 \\ 3,1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{PF} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1,674 \\ 3,1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1,674 \\ -0,9 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow d(P;H) = |\overrightarrow{PF}| = \sqrt{1,674^2 + 0,9^2} \approx 1,90$$

$\Rightarrow$  der Mindestabstand von 1,8 m wird eingehalten.

47.3

$$\vec{J}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 9,3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_J = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 9,3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 93 \\ 0 \\ 50 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_H \circ \vec{n}_J = \begin{pmatrix} 0 \\ -93 \\ 50 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 93 \\ 0 \\ 50 \end{pmatrix} = 2500 \quad |\vec{n}_H| = |\vec{n}_J| = \sqrt{93^2 + 50^2} \approx 105,59$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{2500}{105,59 \cdot 105,59} \approx 0,22423 \quad \Rightarrow \alpha \approx 77,04^\circ$$

$$\Rightarrow \text{gesuchter Winkel: } 180^\circ - 77,04^\circ = 102,96^\circ$$

47.4

$$\text{Gerade DS: } h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3,5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 1,5 \\ 9,3 \end{pmatrix}$$

Hilfsebene H:  $x_3 = 2,79$  parallel zur  $x_1 - x_2$ -Ebene im Abstand 2,79

$$H \cap h = \{G\} \Rightarrow 9,3t = 2,79 \Rightarrow t = 0,3$$

$$\Rightarrow \vec{g} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3,5 \\ 0 \end{pmatrix} + 0,3 \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 1,5 \\ 9,3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8,5 \\ 3,95 \\ 2,79 \end{pmatrix} \Rightarrow G(8,5 | 3,95 | 2,79)$$

$$\vec{DE} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{GF} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2,1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{DE} \parallel \vec{GF}$$

$$|\vec{DG}| = \left| \begin{pmatrix} -1,5 \\ 0,45 \\ 2,79 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-1,5)^2 + 0,45^2 + 2,79^2} = 3,20$$

$$|\vec{EF}| = \left| \begin{pmatrix} -1,5 \\ -0,45 \\ 2,79 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-1,5)^2 + (-0,45)^2 + 2,79^2} = 3,20$$

$\Rightarrow$  DEFG gleichschenkliges Trapez